MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST G

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad G1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 2y - e^{-t}, \\ y' &= -9x + 4y + 13te^{-t}. \end{aligned}$$

Dále nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující podmínky $x(0) = 1$, $y(0) = 5$.

Příklad G2. Nechť

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 7,\ x^2 + y^2 < z + 1 \right\}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^2(H(\Omega))$.

Příklad G3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je pro $t \in [0, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = t^2 - \sin t$$

a má cosinovou Fourierovu řadu. Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně.

Teoretická část

Otázka G4. Napište definici pojmu: *rozhraničující funkce, regulární bod hranice.*

Otázka G5. Napište znění věty: *charakterisace souvislých prostorů* (Věta 19.22).

Otázka G6. Zformulujte a dokažte větu: *Luzinova N vlastnost* (Věta 22.8).

G1 Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Naleznete všechna maximální řešení soustavy

$$x' = -2x + 2y - e^{-t}$$
$$y' = -9x + 4y + 13t e^{-t}$$

a všechna maximální řešení splňující $x_0(0)=1$, $y_0(0)=5$.

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda+2 & -2 & -e^{-t} \\ 9 & \lambda-4 & 13te^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(\lambda-4)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda+2 & -2 & -e^{-t} \\ \frac{1}{2}(\lambda^2-2\lambda+10) & 0 & (13t+\frac{5}{2})e^{-t} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-4)+9 = \frac{1}{2}(\lambda^2-2\lambda-8+18) = \frac{1}{2}(\lambda^2-2\lambda+10)$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda-4)e^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-t} = \frac{5}{2}e^{-t}$$

2. řádek

$$\frac{1}{2}(x''-2x'+10x) = e^{-t}\left(13t+\frac{5}{2}\right)$$

$$x''-2x'+10x = e^{-t}(26t+5)$$

charakteristický polynom $\xi^2-2\xi+10$, $\xi_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i$

F.S.: $e^t\cos 3t$, $e^t \sin 3t$

speciální pravá strana $e^{-t}((26t+5)\cos 0 + 0 \sin 0)$, -1 není kořenem ch.p.

partikulární řešení hledáme ve tvaru $x_p(t) = e^{-t}(At+B)$

$$x_p'(t) = e^{-t}(-At-B+A)$$
$$x_p''(t) = e^{-t}(At+B-2A)$$

Dosazení

$$e^{-t}(At+B-2A) - 2e^{-t}(-At-B+A) + 10e^{-t}(At+B) = (26t+5)e^{-t}$$

$$A+2A+10A = 13A = 26 \Rightarrow A = 2$$
$$B-2A+2B-2A+10B = -4A+13B$$
$$-8+13B = 5$$
$$13B = 13 \Rightarrow B = 1$$

$$x_p(t) = e^{-t}(2t+1)$$

$$x(t) = x_p(t) + [F.S.] = e^{-t}(2t+1) + c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \sin 3t$$

$$x'(t) = e^{-t}(-2t-1+2) + c_1 e^t \cos 3t - 3c_1 e^t \sin 3t + c_2 e^t \sin 3t + 3c_2 e^t \cos 3t$$
$$= e^{-t}(-2t+1) + e^t \cos 3t(c_1+3c_2) + e^t \sin 3t(-3c_1+c_2)$$

1. řádek

$$x' = -2x + 2y - e^{-t}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x' + 2x + e^{-t}\right) = \frac{1}{2}x' + x + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$= e^{-t}\left(-t + \frac{1}{2}\right) + e^{t}\cos 3t\left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2\right) + e^{t}\sin 3t\left(-\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2\right) +$$

$$+ e^{-t}(2t+1) + c_1 e^{-t}\cos 3t + c_2 e^{-t}\sin 3t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$= e^{-t}(t+2) + e^{t}\cos 3t\left(\frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2\right) + e^{t}\sin 3t\left(-\frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2\right)$$

Obecné řešení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(2t+1) \\ e^{-t}(t+2) \end{pmatrix} + e^{t}\cos 3t \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 \end{pmatrix} + e^{t}\sin 3t \begin{pmatrix} c_2 \\ -\frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$,
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení počáteční podmínky $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = 5$:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1 + c_1 \\ 5 &= 2 + \frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

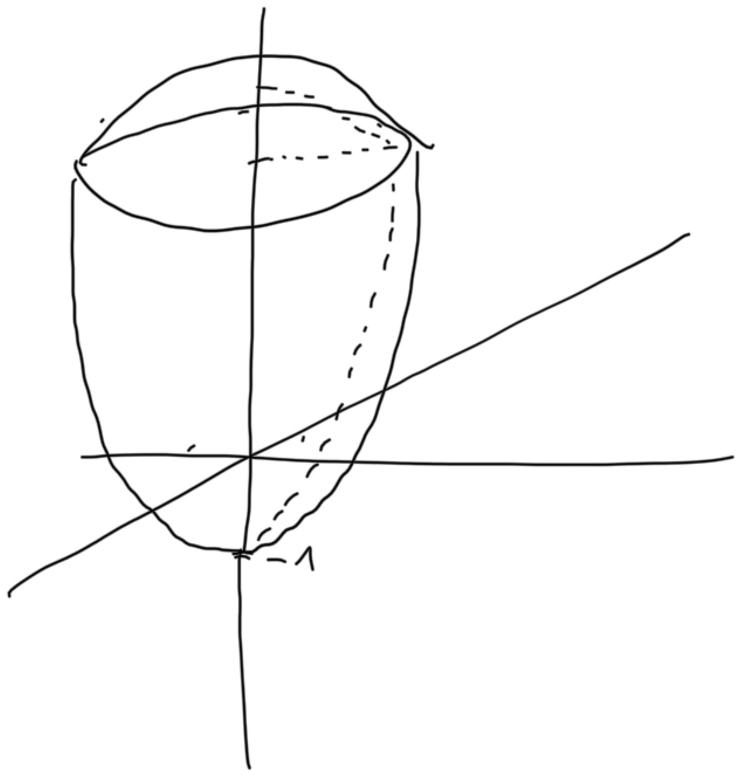
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(2t+1) + 2e^{t}\sin 3t \\ e^{-t}(t+2) + 3e^{t}\cos 3t + 3e^{t}\sin 3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD G2. Nechť

$$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 < 7;\ x^2+y^2 < z+1\}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^2(H(\Omega))$.

Řešení! Použijeme area formuli pro $n=3$, $k=2$ a $f(x,y,z)=1$. Potom $k<n$ a f je borelovská!



Ze soustavy $x^2+y^2+z^2=7$ & $x^2+y^2=z+1$ dostaneme

$$7-z^2 = z+1,$$

tedy $z^2+z-6=0$, tj. $(z+3)(z-2)=0$.

Tato rovnice má kořeny $z=2$ a $z=-3$, přičemž v úvahu přichází pouze $z=2$ (neboť z druhé rovnice vyplývá, že $z+1 \geq 0$). Položme

$$H_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=7,\ z \in (2,\sqrt{7}]\},$$

$$H_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=z+1,\ z \in (-1,2)\},$$

$$H_3 = \{[0,0,-1]\},$$

$$H_4 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=3,\ z=2\}.$$

Potom zřejmě $\mathcal{H}^2(H_3) = 0$. Množina H_4 je kružnice, což je lipschitzovský obraz intervalu, tudíž $\mathcal{H}^1(H_4) < \infty$, a tedy $\mathcal{H}^2(H_4) = 0$. Protože H_1, H_2, H_3 a H_4 jsou borelovské, platí

$$\mathcal{H}^2(H(\Omega)) = \mathcal{H}^2(H_1) + \mathcal{H}^2(H_2).$$

<u>výpočet $\mathcal{H}^2(H_1)$</u>

Položme $G_1 = (0,\sqrt{3}) \times (0,2\pi)$ a

$$\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ \sqrt{7-r^2} \end{pmatrix} \quad \text{pro } [r,\alpha] \in G_1.$$

Potom $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a

$$H_1 = \varphi(G_1) \cup \{ [r,0,\sqrt{7-r^2}];\ r \in [0,\sqrt{3}) \}.$$

Funkce $r \mapsto [r,0,\sqrt{7-r^2}]$ je lipschitzovská na $[0,\sqrt{3})$, tedy $\mathcal{H}^1(\{ [r,0,\sqrt{7-r^2}];\ r \in [0,\sqrt{3}) \}) < \infty$, a tedy

$$\mathcal{H}^2(\{ [r,0,\sqrt{7-r^2}];\ r \in [0,\sqrt{3}) \}) = 0,$$

takže $\quad \mathcal{H}^2(H_1) = \mathcal{H}^2(\varphi(G_1)).$

Platí

$$\varphi'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ \frac{-r}{\sqrt{7-r^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\varphi'(r,\alpha)^T \cdot \varphi'(r,\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & -\frac{r}{\sqrt{7-r^2}} \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ \frac{-r}{\sqrt{7-r^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{r^2}{7-r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\operatorname{vol} \varphi'(r,\alpha) = \sqrt{\det \varphi'(r,\alpha)^T \cdot \varphi'(r,\alpha)}$$

$$= \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{7-r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7r^2}{7-r^2}} = \frac{\sqrt{7}\,r}{\sqrt{7-r^2}} > 0$$

pro každá $[r,\alpha] \in G_1$. Navíc zřejmě $\varphi \in C^1(G_1)$, takže φ je regulární. Dokážeme, že φ je prosté. Předpokládejme, že pro nějaká $[r_1,\alpha_1]$, $[r_2,\alpha_2] \in G$ platí

$$\begin{pmatrix} r_1 \cos(\alpha_1) \\ r_1 \sin(\alpha_2) \\ \sqrt{7-r_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \cos(\alpha_2) \\ r_2 \sin(\alpha_2) \\ \sqrt{7-r_2^2} \end{pmatrix}.$$

Potom $r_1 = r_2$ (ze 3. složky),

tedy $$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha_1) &= \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1) &= \sin(\alpha_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Podle area formule tedy platí

$$\mathcal{H}^2(\varphi(G_1)) \overset{(AF)}{=} \int_{G_1} \frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{7-r^2}} \, d\lambda^2$$

$$\overset{(Fubini)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{7}r}{\sqrt{7-r^2}} \, dr \, d\varphi$$

$$= \sqrt{7}\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{7-r^2}} \, dr$$

$$\begin{aligned} \tau &= 7-r^2 \\ d\tau &= -2r\,dr \end{aligned} \qquad \begin{array}{c|c|c} r & 0 & \sqrt{3} \\ \hline \tau & 7 & 4 \end{array}$$

$$= \sqrt{7}\pi \int_4^7 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = 2\sqrt{7}\pi \left[\sqrt{\tau} \right]_{\tau=4}^{\tau=7}$$

$$= 2\sqrt{7}\pi\left(\sqrt{7}-2\right) = \left(14-4\sqrt{7}\right)\pi.$$

<u>výpočet $\mathcal{H}^2(H_2)$</u>

Položme $G_2 = (-1,2)\times(0,2\pi)$ a

$$\psi(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \sqrt{z+1}\cos\alpha \\ \sqrt{z+1}\sin\alpha \\ z \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad [z,\alpha]\in G_2.$$

Potom $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a

$$H_2 = \psi(G_2) \cup \{[\sqrt{z+1}, 0, z];\ z\in(-1,2)\}.$$

Platí

$$\{[\sqrt{z+1}, 0, z];\ z\in(-1,2)\} = \{[t,0,t^2-1];\ t\in(0,\sqrt{3})\},$$

a tedy je tato množina lipschitzovským obrazem intervalu. Tedy

$$\mathcal{H}^1\left(\{[\sqrt{z+1}, 0, z];\ z\in(-1,2)\}\right) < \infty,$$

a tedy $\mathcal{H}^2\left(\{[\sqrt{z+1}, 0, z];\ z\in(-1,2)\}\right) = 0.$

Odtud plyne, že $\mathcal{H}^2(H_2) = \mathcal{H}^2(\psi(G_2))$.

Platí

$$\psi'(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z+1}}\cos\alpha & -\sqrt{z+1}\sin\alpha \\ \frac{1}{2\sqrt{z+1}}\sin\alpha & \sqrt{z+1}\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\psi'(z,\alpha)^T \cdot \psi'(z,\alpha) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha}{2\sqrt{z+1}} & \frac{\sin\alpha}{2\sqrt{z+1}} & 1 \\ -\sqrt{z+1}\sin\alpha & \sqrt{z+1}\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha}{2\sqrt{z+1}} & -\sqrt{z+1}\sin\alpha \\ \frac{\sin\alpha}{2\sqrt{z+1}} & \sqrt{z+1}\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4(z+1)} & 0 \\ 0 & z+1 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\det \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4(z+1)} & 0 \\ 0 & z+1 \end{pmatrix} = z+1+\frac{1}{4} = z+\frac{5}{4},$$

dostáváme

$$\operatorname{vol} \psi'(z,\alpha) = \sqrt{z+\frac{5}{4}} > 0 \text{ pro každá } [z,\alpha] \in G_2.$$

Navíc zřejmě $\psi \in C^1(G_2)$, takže ψ je regulární!

Dokážeme, že ψ je prosté! Předpokládejme, že pro nějaká $[z_1,\alpha_1], [z_2,\alpha_2] \in G_2$ platí

$$\begin{pmatrix} \sqrt{z_1+1}\cos\alpha_1 \\ \sqrt{z_1+1}\sin\alpha_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{z_2+1}\cos\alpha_2 \\ \sqrt{z_2+1}\sin\alpha_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Potom $z_1 = z_2$ (3. složka), tedy

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2,$$

takže ψ je prosté. Podle area formule tedy platí

$$\mathcal{H}^2(H_2) \overset{(AF)}{=} \int_{G_2} \sqrt{z+\frac{5}{4}}\, d\lambda^2$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2} \sqrt{z+\frac{5}{4}}\, dz\, d\alpha = 2\pi \int_{-1}^{2} \sqrt{z+\frac{5}{4}}\, dz$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[\left(z+\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{z=-1}^{z=2}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(13^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Závěr

$$\mathcal{H}^2(H(\Omega)) = \pi\left(14 - 4\sqrt{7} + \frac{13^{3/2}-1}{6}\right).$$

Hodnocení popis $H(\Omega)$ ... 1/2

$\mathcal{H}^2(H_3) = \mathcal{H}^2(H_4) = 0$ ... 1

$\mathcal{H}^2(H_1)$ ... 4

$\mathcal{H}^2(H_2)$ ... 4

závěr ... 1/2

Příklad G3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $[0,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = t^2 - \sin(t)$$

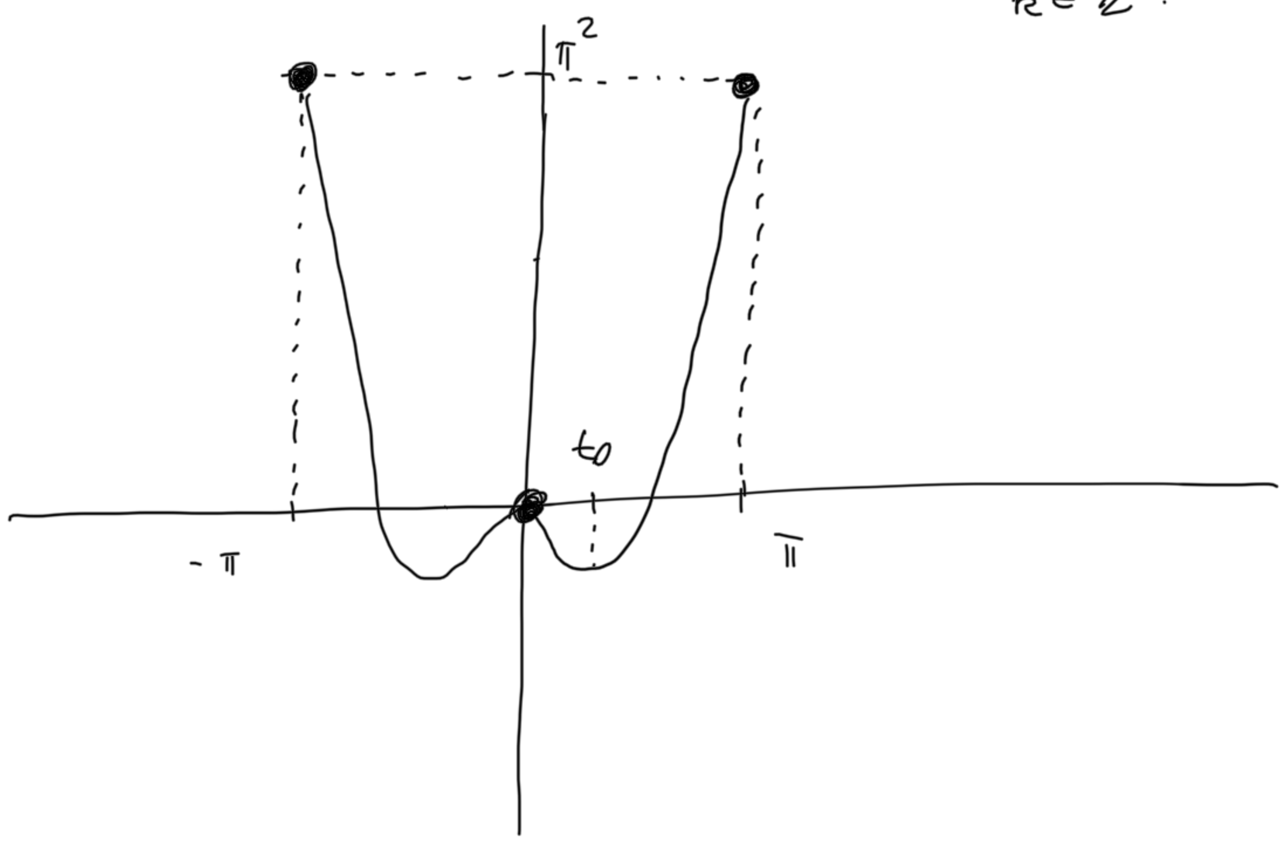
a má cosinovou Fourierovu řadu.

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně.

Řešení. Položme

$$f(t) = \begin{cases} (t-2k\pi)^2 - \sin(t) & \text{pro } t \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \\ (t-2k\pi)^2 + \sin(t) & \text{pro } t \in [(2k-1)\pi, 2k\pi), \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$.



Potom $f \in \mathcal{P}^{2\pi}$, spojitá a sudá na $\mathbb{R}$. Pro $t \in (0,\pi)$ platí $f'(t) = 2t - \cos(t)$ a $f''(t) = 2 + \sin(t)$. Tedy f' je rostoucí na $(0,\pi)$. Protože $f'(\pi-) = 2\pi+1 > 0$ a $f'(0_+) = -1$, existuje právě jedno $t_0 \in (-\pi, 0)$ splňující $f'(t_0) = 0$. Funkce f je tedy klesající na $(0, t_0)$ a rostoucí na (t_0, π). Odtud plyne, že f je po částech monotónní na $[0,\pi]$. Tedy $f \in BV([-\pi,\pi])$. Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy $\sigma_m^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$. Podle charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu platí $\sigma_m^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy, díky periodicitě f, $\sigma_m^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Vypočteme Fourierovy koeficienty f. Jest

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(t^2 - \sin(t)\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3} + \cos(t)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - 2\right) = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{4}{\pi}.$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ jest

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos(mt)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(mt)\,dt,$$

$$\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt = \left[t^2\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{2}{n}\left[t\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi \frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= \frac{2}{n^2}\left((-1)^n\pi\right) + \frac{2}{n^2}\left[\frac{-\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n.$$

Pro $n\in\mathbb{N}$ označme $\alpha_n = \int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)\,dt$, pak

$$\alpha_n = \left[\sin(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\left[\cos(t)\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi -\sin(t)\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\,dt$$

$$= \left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}\right) + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

Tedy

$$\alpha_n\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Pro $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, odtud plyne

$$\alpha_n = \frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1},$$

a tedy

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{\pi(n^2-1)}\left((-1)^{n+1}-1\right).$$

Dále platí

$$d_1 = \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi} = 0,$$

takže $a_1 = -4.$ Úhrnem

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2} & \text{pro } n \text{ liché}, \\[2ex] \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Protože f je sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tedy platí

$$\sigma^{f}(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\pi} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\right)\cos(2kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$