# MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
# TEST F

LUBOŠ PICK

## Početní část

**Příklad F1.** Nechť $x, y$ jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x - 2y - 2\cos(2t), \\ y' &= 6x - 4y + 3\sin(2t) - 2t\cos(2t). \end{aligned}$$

Dále nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující podmínky $x(0) = 1$, $y(0) = \frac{3}{4}$.

**Příklad F2.** Nechť $a > 0$. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c \left( \frac{e^y}{1+x} + y \right) dx + \log(1+x) e^y \, dy,$$

kde $c$ je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadané předpisem

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < ax, \ x < y \right\}.$$

**Poznámka.** Při písemce byl omylem zadán integrál

$$\int_c \left( \frac{e^y}{1+x} + x \right) dx + \log(1+x) e^y \, dy.$$

**Příklad F3.** Nalezněte $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 5t + \cos(2t) & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ -t & \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu $s^f$ funkce $f$. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje $s^f$ bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž $s^f$ konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

## Teoretická část

**Otázka F4.** Napište definici pojmu: *tok, divergence a rotace vektorového pole.*

**Otázka F5.** Napište znění věty: *vlastnosti Hausdorffovy míry* (Věta 20.7).

**Otázka F6.** Zformulujte a dokažte větu: *charakterisace separabilních prostorů* (Věta 19.14).

**F1** Nechť $x, y$ jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$x' = 4x - 2y - 2\cos 2t$$
$$y' = 6x - 4y + 3\sin 2t - 2t\cos 2t$$

Dále nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující podmínky $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = \frac{3}{4}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 4 & 2 & -2\cos 2t \\ -6 & \lambda + 4 & 3\sin 2t - 2t\cos 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 4 & 2 & -2\cos 2t \\ -\frac{1}{2}\lambda^2 + 2 & 0 & \sin 2t + (-2t+4)\cos 2t \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{2}(\lambda+4)$

$$-\frac{1}{2}(\lambda+4)(\lambda-4) - 6 = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - 16) - 6 = -\frac{1}{2}\lambda^2 + 8 - 6 = -\frac{1}{2}\lambda^2 + 2$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda+4)\cdot(-2\cos 2t) = -2\sin 2t + 4\cos 2t$$

2. řádek

$$-\frac{1}{2}x'' + 2x = \sin 2t + (-2t+4)\cos 2t$$

$$x'' - 4x = -2\sin 2t + (4t-8)\cos 2t$$

charakteristický polynom $\xi^2 - 4 \Rightarrow \xi_{1,2} = \pm 2$, F.S. $e^{2t}, e^{-2t}$

speciální pravá strana $-2\sin 2t + (4t-8)\cos 2t$, $2i$ není kořen ch.p.

partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$x_p(t) = (At+B)\sin 2t + (Ct+D)\cos 2t$$

$$x_p'(t) = A\sin 2t + C\cos 2t + 2(At+B)\cos 2t - 2(Ct+D)\sin 2t$$
$$= (A - 2Ct - 2D)\sin 2t + (C + 2At + 2B)\cos 2t$$

$$x_p''(t) = -2C\sin 2t + 2A\cos 2t + 2(A - 2Ct - 2D)\cos 2t - 2(C + 2At + 2B)\sin 2t =$$
$$= (-4C - 4At - 4B)\sin 2t + (4A - 4Ct - 4D)\cos 2t$$

Dosazení

$$-4A\cdot t + (-4C - 4B) - 4(At+B) = -2$$
$$-4C\cdot t + (4A - 4D) - 4(Ct+D) = 4t - 8$$

$$-8\cdot A = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$-8\cdot C = 4 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$
$$-4C - 8B = -2 \Rightarrow -8B = -4 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$
$$4A - 8D = -8 \Rightarrow D = 1$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\cos 2t$$

$$x(t) = x_p(t) + [F.S.] = \frac{1}{2}\sin 2t + \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\cos 2t + c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1. řádek

$$x' = 4x - 2y - 2\cos 2t$$

$$y = -\frac{1}{2}x' + 2x - \cos 2t = -\frac{1}{2}\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\sin 2t + 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}\right) +$$

$$+ \sin 2t + (-t + 2)\cos 2t + 2c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-2t} - \cos 2t =$$

$$= c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} + \sin 2t\left(-\frac{1}{2}t + 2\right) + \cos 2t\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - t + 2 - 1\right)$$

Obecné řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2t + \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\cos 2t \\ \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)\sin 2t + \left(-t + \frac{3}{4}\right)\cos 2t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$\left.\begin{aligned} 1 = x(0) &= 1 + c_1 + c_2 \\ \frac{3}{4} = y(0) &= \frac{3}{4} + c_1 + 3c_2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} c_1 &= -c_2 \\ 0 &= c_1 - 3c_1 = -2c_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2t + \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\cos 2t \\ \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)\sin 2t + \left(-t + \frac{3}{4}\right)\cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

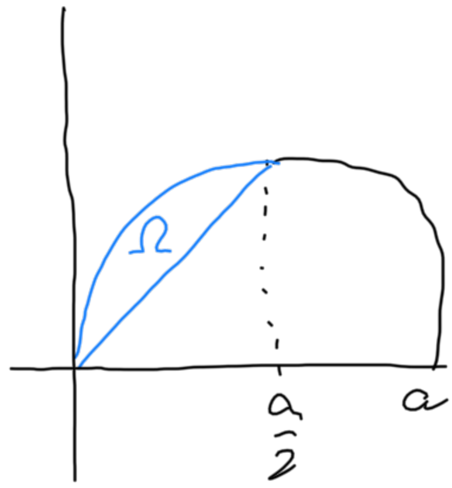
Příklad F2. Nechť $a>0$. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c \left(\frac{e^y}{1+x}+y\right)dx + \log(1+x)e^y dy,$$

kde $c$ je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ zadané předpisem

$$\Omega=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<ax,\ x<y\}.$$

Řešení. parametrisace $c$




Položme

$$c(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}, & t\in[0,\frac{a}{2}],\\ \begin{pmatrix}\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(t+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})\\ \frac{a}{2}\sin(t+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})\end{pmatrix}, & t\in[\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}].\end{cases}$$

Potom $c:[0,\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2$,

$$c\in\mathcal{C}^1([0,\tfrac{a}{2}])\cup\mathcal{C}^1([\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}+\tfrac{\pi}{2}]),$$

$$c(\tfrac{a}{2}-)=c(\tfrac{a}{2}+)=[\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}],$$

takže $c$ je po částech regulární křivka.

Navíc $c(0)=c(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})=[0,0]$, takže $c$ je uzavřená.

Ověříme, že $c$ je jednoduchá. Předpokládejme, že pro nějaká $t_1,t_2\in[0,\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}]$ platí $c(t_1)=c(t_2)$. Potom

jestliže $t_1,t_2\in[0,\frac{a}{2}]$, pak $\begin{pmatrix}t_1\\t_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_2\\t_2\end{pmatrix}$, a tedy $t_1=t_2$,

jestliže $t_1,t_2\in[\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}]$, pak

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(t_1+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \\ \frac{a}{2}\sin(t_1+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(t_2+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \\ \frac{a}{2}\sin(t_2+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \end{pmatrix},$$

tedy $\cos(t_1+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) = \cos(t_2+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})$, tudíž $t_1=t_2$

(neboť cos je prostá funkce na $[\frac{\pi}{2},\pi]$),

a jestliže $t_1\in[0,\frac{a}{2}]$ a $t_2\in(\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})$, pak

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(t_2+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \\ \frac{a}{2}\sin(t_2+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}) \end{pmatrix},$$

což nemůže nastat. Tedy c je jednoduchá.

normála

Pro $x\in(0,\frac{a}{2})$, $y=x$, položme

$$h_1(x,y) = x-y.$$

Potom existuje okolí $\mathcal{U}_1$ bodu $[x,y]$, na němž platí

$$\nabla h_1(\bar{x},\bar{y}) = (1,-1) \neq \theta, \quad [\bar{x},\bar{y}]\in\mathcal{U}_1$$

a $h_1\in C^1(\mathcal{U}_1)$, takže $h_1$ je rozlišující funkce pro $\Omega$.

Pro $x\in(0,\frac{a}{2})$, $y=\sqrt{ax-x^2}$, položme

$$h_2(x,y) = x^2+y^2-ax.$$

Potom existuje okolí $\mathcal{U}_2$ bodu $[x,y]$, na němž platí

$$\nabla h_2(\bar{x},\bar{y}) = (2\bar{x}-a,\ 2\bar{y}) \neq \theta,\quad [\bar{x},\bar{y}]\in\mathcal{U}_2,$$

a $h_2 \in C^1(U_2)$, takže $h_2$ je rozhraničující funkce pro $\Omega$. Tedy

je-li $t \in (0, \frac{a}{2})$, potom

$$\nu_\Omega(c(t)) = \frac{\nabla h_1(c(t))}{\|\nabla h_1(c(t))\|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

a je-li $t \in (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})$, potom

$$\nu_\Omega(c(t)) = \frac{\nabla h_2(c(t))}{\|\nabla h_2(c(t))\|} = \left(\cos\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

<u>kontrola orientace</u>

Ověříme, že platí:

$$\exists t \in [0, \tfrac{a}{2}+\tfrac{\pi}{2}] : \det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) > 0.$$

Jest

$$c'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{pro } t \in (0, \frac{a}{2}) \\ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} & \text{pro } t \in (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Tedy pro $t \in (0, \frac{a}{2})$ platí

$$\det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

a pro $t \in (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})$ platí

$$\det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) = \det\begin{pmatrix}\cos\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(t+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$= 1 > 0.$$

Tedy pro ověření kontroly orientace lze použít každé $t \in (0, \frac{a}{2}) \cup (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})$.

<u>výpočet integrálu</u>

Položme $G = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x > -\frac{1}{2} \}$

a $$f = \left(\frac{e^y}{1+x} + y,\ \log(1+x)\, e^y\right).$$

Potom platí:
- $G$ je otevřená,
- $f \in C^1(G)$,
- $\overline{\Omega} \subset G$,
- $\Omega = \operatorname{Int} c$.

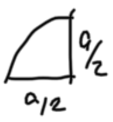
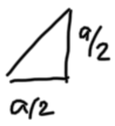
Dále jest

$$\operatorname{curl} f(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

$$= \frac{1}{1+x} e^y - \frac{e^y}{1+x} - 1 = -1 \quad \text{pro } x,y \in G.$$

Podle Greenovy–Jordanovy věty tedy platí

$$\int_c f \cdot dc = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{curl} f \, d\lambda^2 = \int_\Omega (-1)\, d\lambda^2 = -\lambda^2(\Omega).$$

Jest $\lambda^2(\Omega) =$  $-$  $= \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi-2}{16}a^2.$

## Výpočet $\lambda^2(\Omega)$ dle Fubiniovy věty

$$\lambda^2(\Omega) = \int_0^{a/2} \int_x^{\sqrt{ax-x^2}} dy\, dx$$

$$= \int_0^{a/2} \left(\sqrt{ax-x^2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{a/2} \sqrt{ax-x^2}\, dx - \int_0^{a/2} x\, dx .$$

V prvním integrálu provedeme substituci

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin(\tau) \qquad dx = \frac{a}{2}\cos(\tau)\, d\tau$$

| $x$ | $0$ | $a/2$ |
|---|---|---|
| $\tau$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ |

Dostaneme

$$\int_0^{a/2} \sqrt{ax-x^2}\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin(\tau)\right) - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\sin(\tau) - \frac{a^2}{4}\sin^2(\tau)} \cdot \frac{a}{2}\cos(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\sin^2(\tau)} \cdot \frac{a}{2}\cos(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2(\tau)\, d\tau = \frac{a^2}{4}\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1+\cos(2\tau)}{2}\, d\tau$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\frac{\tau}{2} + \frac{\sin(2\tau)}{4}\right]_{\tau=-\pi/2}^{0} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Dále jest

$$\int_0^{a/2} x\,dx = \frac{a^2}{8}.$$

Tedy $\lambda^2(\Omega) = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} = \frac{\pi - 2}{16}\,a^2,$

takže

$$\int_C f \cdot ds = -\frac{\pi-2}{16}\,a^2.$$

PŘÍKLAD F3. Nalezněte $2\pi$-periodickou funkci $f$, která je na intervalu $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t)=\begin{cases} 5t+\cos(2t) & \text{pro } t\in(-\pi,0),\\ -t & \text{pro } t\in[0,\pi].\end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu $s^f$ funkce $f$. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje $s^f$ bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž $s^f$ konverguje lokálně stejnoměrně.

Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Řešení. Položme

$$f(t)=\begin{cases} 5(t-2k\pi)+\cos(2t-4k\pi) & \text{pro } t\in(-\pi+2k\pi,\ 2k\pi),\\ -t+2k\pi & \text{pro } t\in[2k\pi,\ (2k+1)\pi],\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Potom $f\in\mathcal{P}^{2\pi}$ a $f$ je spojitá na $(-\pi,0)$ a na $(0,\pi)$.

Protože $\quad f(-\pi_-)=f(\pi_-)=-\pi$

a $\quad f(-\pi_+)=f(\pi_+)=5\pi+1,$

$f$ není spojitá v $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Protože $\quad f(0-)=1 \quad$ a $\quad f(0+)=0,$

$f$ není spojitá v $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Zřejmě je $f$ klesající na $[0,\pi]$, a tedy $f\in BV([0,\pi])$.

Funkce $t \mapsto 5t$ je rostoucí na $(-\pi, 0)$ a funkce $t \mapsto \cos(2t)$ je klesající na $(-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ a rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Obě tyto funkce tedy patří do $BV([-\pi, 0])$, a tedy $f \in BV([-\pi, 0])$. Z periodicity plyne, že $f \in BV([-2\pi, 2\pi])$. Podle Jordanova – Dirichletova kritéria platí

$$\sigma^f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t = 2k\pi \\ f(t), & t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \cup ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \\ -\frac{\pi}{2} - 2, & t = (2k+1)\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

a $\sigma_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ a na $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Z Mooreovy - Osgoodovy věty plyne, že tyto intervaly jsou maximální, neboť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\sigma_n^f$ spojitá v $2k\pi$ a v $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ale $f$ je v každém z těchto bodů nespojitá.

Fourierovy koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (5t + \cos(2t))\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-t)\, dt$$

$$= \frac{5}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} + \left[ \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{5}{2\pi} \pi^2 + 0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2}$$

$$= -3\pi,$$

a pro $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (5t + \cos(2t)) \cos(nt)\, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt.$$

Jest

$$\int_{-\pi}^{0} 5t\cos(nt)\,dt = 5\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - 5\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= -5\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{5}{n^2}\Big(1-\cos(n\pi)\Big) = 5\,\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Označme

$$I_n = \int_{-\pi}^{0}\cos(2t)\cos(nt)\,dt, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Potom

$$I_n = \left[\frac{\cos(2t)\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\big(-2\sin(2t)\big)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= 2\left[\sin(2t)\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} 4\cos(2t)\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\,dt$$

$$= \frac{4}{n^2}I_n.$$

Tedy $I_n\left(1-\frac{4}{n^2}\right)=0$. Odtud plyne, že

$I_n = 0$ pro každé $n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$.

Hodnotu $I_2$ musíme spočítat zvlášť. Platí

$$I_2 = \int_{-\pi}^{0}\cos^2(2t)\,dt = \int_{-\pi}^{0}\frac{1+\cos(4t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(4t)}{8}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n\neq 2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } n=2. \end{cases}$$

Dále

$$\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} = \frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

Celkem tedy

$$a_n = 5\,\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} + \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$= 6\,\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé},\\ \dfrac{12}{n^2\pi} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Jest pro $n\in\mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(5t+\cos(2t))\sin(nt)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt.$$

Platí

$$\int_{-\pi}^{0} 5t\sin(nt)\,dt = 5\left[t\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - 5\int_{-\pi}^{0}\frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\frac{5\pi}{n}\cos(n\pi) + 5\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{5\pi}{n}(-1)^n.$$

Označme pro $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{-\pi}^{0} \cos(2t)\sin(nt)\,dt .$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$I_n = \left[\cos(2t)\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} -2\sin(2t)\cdot\frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0} \sin(2t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n} - \frac{2}{n}\left[\sin(2t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0} 2\cos(2t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n} + \frac{4}{n^2} I_n ,$$

tedy $$I_n\left(1 - \frac{4}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n - 1}{n},$$

a tudíž $$I_n = \frac{n}{n^2-4}\cdot\left((-1)^n - 1\right), \quad n \neq 2$$

Dále jest

$$I_2 = \int_{-\pi}^{0} \cos(2t)\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \sin(4t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(4t)}{4}\right]_{-\pi}^{0} = 0 .$$

Konečně

$$\int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \left[t\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= \pi\,\frac{1-(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \pi\,\frac{1-(-1)^n}{n} .$$

Celkem tedy platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = -\frac{5}{n}(-1)^n + \frac{n}{\pi(n^2-4)}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{1-(-1)^n}{n},$$

tedy

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{5}{2k} & \text{pro } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\[2ex] \dfrac{3}{2k-1} - \dfrac{2(2k-1)}{\pi\left((2k-1)^2-4\right)} & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

## Fourierova řada

Jest

$$s^f(t) = -\frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2} + \frac{\cos(2t)}{2} - \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kt)}{k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2k-1} - \frac{2(2k-1)}{\pi\left((2k-1)^2-4\right)}\right)\sin\left((2k-1)t\right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

## Číselná řada

Položme $t=0$. Z předchozího plyne, že

$$s^f(0) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

a tedy

$$\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{2},$$

takže

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Hodnocení

bodová konvergence, součet řady ... 2

lokálně stejnoměrná konvergence ... 2

$a_0, a_n, a_2, b_n, b_2$ ... 5

číselná řada ... 1