MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST E

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad E1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -6x + 3y + 3e^t, \\ y' &= -7x + 4y + e^t. \end{aligned}$$

Dále nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující podmínky $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad E2. Spočtěte tok vektorového pole $f(x, y, z) = (yz^2, ye^x, z)$ hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω zadané předpisem

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1, 1),\ x^2 - y^2 - z^2 > -4x - 4 \right\},$$

která je otevřená a splňuje $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$ (tato fakta již není třeba ověřovat). Ostatní kroky výpočtu zdůvodněte.

Příklad E3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ t & \text{pro } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - t & \text{pro } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Teoretická část

Otázka E4. Napište definici pojmu: *totální variace, funkce s omezenou variací, absolutně spojitá funkce.*

Otázka E5. Napište znění věty: *asociativita zobecněného součtu* (Věta 21.13).

Otázka E6. Zformulujte a dokažte větu: *o úrovňové množině* (Věta 20.13).

E1 Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte soustavu

$$x' = -6x + 3y + 3e^t$$
$$y' = -7x + 4y + e^t$$

a nalezněte řešení splňující počáteční podmínku

$$x_0(0) = 0,\ y_0(0) = 0.$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda+6 & -3 & 3e^t \\ 7 & \lambda-4 & e^t \end{array}\right) \tfrac{1}{3}(\lambda-4) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda+6 & -3 & 3e^t \\ \tfrac{1}{3}(\lambda^2+2\lambda-3) & 0 & -2e^t \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}(\lambda-4)(\lambda+6) + 7 = \tfrac{1}{3}(\lambda^2+2\lambda-24) + \tfrac{21}{3} = \tfrac{1}{3}(\lambda^2+2\lambda-3)$$
$$\tfrac{1}{3}(\lambda-4)3e^t + e^t = e^t - 4e^t + e^t = -2e^t$$

2. řádek

$$\tfrac{1}{3}(x'' + 2x' - 3x) = -2e^t$$
$$x'' + 2x' - 3x = -6e^t$$

charakteristický polynom $\xi^2 + 2\xi - 3 = (\xi+3)(\xi-1)$, $\xi_1 = 1, \xi_2 = -3$

F.S.: e^t, e^{-3t}

speciální pravá strana $-6e^t$, 1 je kořenem charakteristického polynomu $\Rightarrow$ partikulární řešení hledáme ve tvaru $x_p(t) = At \cdot e^t$

$$x_p'(t) = Ae^t + Ate^t = e^t(At + A)$$
$$x_p''(t) = e^t(At+A) + e^tA = e^t(At + 2A)$$

Dosazení

$$e^t(At+2A) + 2e^t(At+A) - 3At \cdot e^t = e^t\big(t(A+2A-3A) + (2A+2A)\big) = 4Ae^t = -6e^t$$
$$A = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_p(t) = -\frac{3}{2}te^t$$

$$x(t) = x_p(t) + [F.S.] = \frac{-3}{2}te^t + c_1e^t + c_2e^{-3t}$$

$$x'(t) = \frac{-3}{2}e^t + \frac{-3}{2}te^t + c_1e^t - 3c_2e^{-3t}$$

1. řádek

$$x' = -6x + 3y + 3e^t$$

$$y = \frac{1}{3}\left(x' + 6x - 3e^t\right) = \frac{x'}{3} + 2x - e^t =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{3}c_1e^t - c_2e^{-3t} - 3te^t + 2c_1e^t + 2c_2e^{-3t} - e^t$$

$$= e^t\left(-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t\right) + \frac{7}{3}c_1e^t + c_2e^{-3t}$$

Obecní řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}te^t \\ \left(-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t\right)e^t \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} e^t \\ \frac{7}{3}e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme počáteční podmínku

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_0(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= y_0(0) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{3}c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c_1 = -c_2 \\ &\frac{3}{2} = \frac{4}{3}c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{8} \\ &c_2 = -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}te^t + \frac{9}{8}e^t - \frac{9}{8}e^{-3t} \\ -\frac{7}{2}te^t + \frac{9}{8}e^t - \frac{9}{8}e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

E2] Spočtěte tok vektorového pole $f(x,y,z) = (yz^2, ye^x, z)$

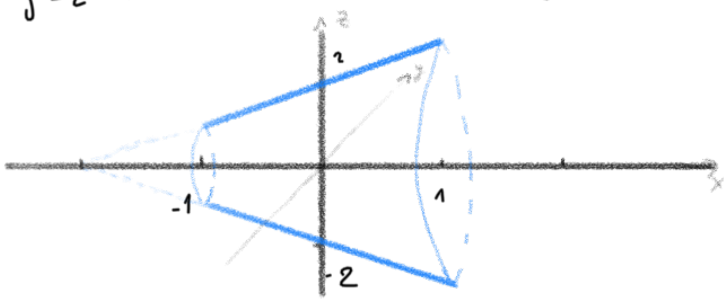
hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω zadané předpisem

$$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1,1),\ x^2 - y^2 - z^2 > -4x - 4\},$$

která je otevřená a splňuje, že $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$.

Řešení pomocí Gaussovy věty. $n=3,\ k=2$

$x^2 - y^2 - z^2 > -4x - 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 < (x+2)^2$



Ω je omezená, neboť $\Omega \subset [-1,1] \times [-3,3]^2$

a je neprázdná ($[0,0,0] \in \Omega$)

množinu $H(\Omega)$ rozdělíme na

$H_1 = \{[x,y,z],\ x = 1,\ y^2 + z^2 < 9\}$

$H_2 = \{[x,y,z],\ x \in (-1,1),\ y^2 + z^2 = (x+2)^2\}$

$H_3 = \{[x,y,z],\ x = -1,\ y^2 + z^2 < 1\}$

$C_1 = \{[x,y,z],\ x = 1,\ y^2 + z^2 = 9\}$

$C_2 = \{[x,y,z],\ x = -1,\ y^2 + z^2 = 1\}$

rozhraničující funkce:

H_1: $h_1 = x - 1,\ \nabla h_1 = (1,0,0) \neq o,\ (\nu_1 = (1,0,0))$

H_2: $h_2 = y^2 + z^2 - (x+2)^2,\ \nabla h_2 = (-2x-4,\ 2y,\ 2z) \neq o$ na H_2

$$\left(\nu_2 = \frac{(-x-2,\ y,\ z)}{\sqrt{x^2+4x+4+y^2+z^2}} = \frac{(-x-2,\ y,\ z)}{\sqrt{2(x+2)^2}}\right)$$

H_3: $h_3 = -x - 1,\ \nabla h_3 = (-1,0,0) \neq o,\ (\nu_3 = (-1,0,0))$

Tedy na H_1, H_2, H_3 existují rozhraničující funkce, $H^*(\Omega) \supset H_1 \cup H_2 \cup H_3$

předpoklady Gaussovy věty: Ω otevřená, omezená, neprázdná

$f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$

ověření $\mathcal{H}^2(H(\Omega) \setminus H^*(\Omega)) = 0$:

$H(\Omega) \setminus H^*(\Omega) \subset C_1 \cup C_2$

$\mathcal{H}^2(H(\Omega) \setminus H^*(\Omega)) \le \mathcal{H}^2(C_1 \cup C_2) = 0$, neboť C_1 i C_2 jsou kružnice a tedy lipschitzovské obrazy intervalu $[-\pi, \pi)$, $\mathcal{H}^1(C_1 \cup C_2) < \infty$ a tedy $\mathcal{H}^2(C_1 \cup C_2) = 0$.

výpočet toku

$$\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2 \overset{G.V.}{=} \int_G \operatorname{div} f \, d\lambda^3 = \int_G e^x + 1 \, d\lambda^3 = \circledast$$

parametrizace G: $\varphi(x, r, \alpha) = \begin{pmatrix} x \\ r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} x \in (-1, 1) \\ \alpha \in (-\pi, \pi) \\ r \in (0, x+2) \end{array}$

$$\varphi'(x, r, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r$$

parametrizace nepokrývá množinu $\{[x, -r, 0], x \in (-1, 1), r \in [0, x+2)\}$, jejíž λ^3 míra je však nulová ($\mathcal{H}^2$ míra je $1+\sqrt{3} < \infty$)

$$\circledast = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{x+2} (e^x + 1) r \, dr \, dx \, d\alpha = 2\pi \int_{-1}^{1} (e^x + 1) \frac{(x+2)^2}{2} \, dx$$

$$= \pi \left(\int_{-1}^{1} e^x (x^2 + 4x + 4) + \int_{-1}^{1} x^2 + 4x + 4 \, dx \right) = \pi(\mathrm{I} + \mathrm{II}) = \pi\left(5e - \frac{1}{e} + \frac{2}{3} + 8\right)$$

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \underset{\uparrow \atop e^x}{e^x} \underset{\downarrow \atop 2x+4}{(x^2 + 4x + 4)} \, dx = \left[e^x (x^2 + 4x + 4) \right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} \underset{\uparrow \atop e^x}{e^x} \underset{\downarrow \atop 1}{(x + 2)} =$$

$$= 9e - \frac{1}{e} - 2\left[e^x (x+2) \right]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} e^x = 9e - \frac{1}{e} - 6e + \cancel{2\frac{1}{e}} + 2e - \cancel{2\frac{1}{e}} = 5e - \frac{1}{e}$$

$$\mathrm{II} = \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 8$$

Příklad E3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{pro } t\in(-\pi,0),\\ t & \text{pro } t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \pi-t & \text{pro } t\in[\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Řešení: Položme

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{pro } t\in(-\pi+2k\pi,2k\pi),\\ t-2k\pi & \text{pro } t\in[2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi),\\ \pi-2k\pi t & \text{pro } t\in[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi], \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Potom $f\in\mathcal{P}^{2\pi}$ a f je spojitá na $\mathbb{R}$, neboť

$$\lim_{t\to-\pi-}f(t)=0=\lim_{t\to\pi+}f(t)$$ a f je zřejmě spojitá na $[-\pi,\pi]$. Zřejmě je f po částech monotónní na $[-2\pi,2\pi]$, a tedy $f\in BV([-2\pi,2\pi])$. Z Jordanova-Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sigma_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(-2\pi,2\pi)$. Z charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence vyplývá, že $\sigma_n^f\rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$.

Z toho, že $f\in\mathcal{P}^{2\pi}$ tedy dále plyne, že $\sigma_n^f\rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Výpočet Fourierových koeficientů f

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi-t)^2}{2}\right]_{t=\pi}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4},$$

pro $n \in \mathbb{N}$ jest

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)(\pi - t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}(\pi - t)\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\cdot(-1)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$- \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\cdot(-1)\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1}{\pi n^2}$$

$$- \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} - \frac{\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2} - \frac{1 + (-1)^n}{\pi n^2}.$$

Jest
$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ (-1)^k & \text{pro } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

takže
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ \dfrac{2(-1)^k - 2}{(4k)^2 \pi} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Dále

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} t \sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[(\pi - t)\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ (-1)^{k+1} & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Fourierova řada

$$s^f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(2kt)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin((2k-1)t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Položme $t=0$. Dostaneme

$$s^f(0) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2}.$$

Z bodové konvergence plyne, že $s^f(0) = f(0) = 0$, a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$