MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST D

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad D1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 13y + 36t\sin(3t), \\ y' &= x - 2y + 6\cos(3t). \end{aligned}$$

Příklad D2. Nechť $a > 0$. Spočtěte

$$\int_c (x^2 - y^2)\, ds,$$

kde

$$c = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2,\ z = x + y,\ 0 \le x \le y\right\}.$$

Příklad D3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 + 1}.$$

Teoretická část

Otázka D4. Napište definici pojmu: *k-plocha*.

Otázka D5. Napište znění věty: *hlavní věta teorie pole* (Věta 20.25).

Otázka D6. Zformulujte a dokažte větu: *Baireova věta* (Věta 19.7).

D1 Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$x' = 2x - 13y + 36t \sin 3t$$
$$y' = x - 2y + 6 \cos 3t .$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-2 & 13 & 36t\sin 3t \\ -1 & \lambda+2 & 6\cos 3t \end{array}\right) \overset{(\lambda-2)}{\curvearrowleft} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda^2+9 & (36t-18)\sin 3t - 12\cos 3t \\ -1 & \lambda+2 & 6\cos 3t \end{array}\right)$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2)+13 = \lambda^2 - 4 + 13 = \lambda^2+9$$
$$6\cos 3t \cdot (\lambda-2) = -18\sin 3t - 12\cos 3t$$

1. řádek $\quad y'' + 9y = (36t-18)\sin 3t - 12\cos 3t$

charakteristický polynom: ξ^2+9, kořeny $\pm 3i$, F. S.: $\cos 3t$, $\sin 3t$

Speciální pravá strana $e^{0t}((36t-18)\sin 3t - 12\cos 3t)$

$0+3i$ je jednonásobným kořenem charakteristického polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(t) = t\,((At+B)\sin 3t + (Ct+D)\cos 3t) = (At^2+Bt)\sin 3t + (Ct^2+Dt)\cos 3t$$

$$y_p'(t) = (2At+B)\sin 3t + 3(At^2+Bt)\cos 3t + (2Ct+D)\cos 3t - 3(Ct^2+Dt)\sin 3t$$
$$= (2At + B - 3Ct^2 - 3Dt)\sin 3t + (3At^2 + 3Bt + 2Ct + D)\cos 3t$$

$$y_p''(t) = (2A - 6Ct - 3D)\sin 3t + 3(2At + B - 3Ct^2 - 3Dt) + (6At + 3B + 2C)\cos 3t -$$
$$- 3(3At^2 + 3Bt + 2Ct + D)\sin 3t =$$
$$= (2A - 6Ct - 3D - 9At^2 - 9Bt - 6Ct - 3D)\sin 3t + (6At + 3B - 9Ct^2 - 9Dt + 6At + 3B + 2C)\cos 3t$$
$$= (-9At^2 + t(-12C - 9B) + (2A - 6D))\sin 3t + (-9Ct^2 + t(12A - 9D) + (6B + 2C))\cos 3t$$

Dosazení
$$-9At^2 + t(-12C - 9B) + (2A - 6D) + 9(At^2 + Bt) = 36t - 18$$
$$-9Ct^2 + t(12A - 9D) + (6B + 2C) + 9(Ct^2 + Dt) = -12$$

$-12C - 9B + 9B = 36 \Rightarrow C = -3$	$2A - 6D = -18 \Rightarrow D = 3$
$-12A - 9D + 9D = 0 \Rightarrow A = 0$	$6B + 2C = -12 \Rightarrow B = -1$

$$y_p(t) = -t\sin 3t + (-3t^2+3t)\cos 3t$$

$$y(t) = y_p(t) + [F.S.] = -t\sin 3t + (-3t^2+3t)\cos 3t + c_1\sin 3t + c_2\cos 3t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}$$

2. řádek $\quad x = y' + 2y - 6\cos 3t$

$$x(t) = -\sin 3t - 3t\cos 3t + (-6t+3)\cos 3t - 3(-3t^2+3t)\sin 3t + 3c_1\cos 3t - 3c_2\sin 3t -$$

$$- 2t\sin 3t + (-6t^2+6t)\cos 3t + 2c_1\sin 3t + 2c_2\cos 3t - 6\cos 3t =$$

$$= c_1(2\sin 3t + 3\cos 3t) + c_2(-3\sin 3t + 2\cos 3t) + (-1 + 9t^2 - 9t - 2t)\sin 3t$$

$$+ (-3t - 6t + 3 - 6t^2 + 6t - 6)\cos 3t$$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} (9t^2 - 11t - 1)\sin 3t + (-6t^2 - 3t - 3)\cos 3t \\ (-t)\cdot\sin 3t + (-3t^2 + 3t)\cos 3t \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 2\sin 3t + 3\cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3\sin 3t + 2\cos 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$t \in \mathbb{R}$.

Příklad D2. Nechť $a>0$. Spočtěte

$$\int_C (x^2-y^2)\,ds,$$

kde $C=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=a^2,\ z=x+y,\ 0\le x\le y\}$.

Řešení. Položme

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} a\cos(t)\\ a\sin(t)\\ a\cos(t)+a\sin(t)\end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].$$

Potom $C=\varphi\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right)$, C je po částech regulární křivka,

neboť $\varphi:\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3$ je spojité, $\varphi\in\mathcal{C}^1\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ a

$$\varphi'(t)=\begin{pmatrix} -a\sin(t)\\ a\cos(t)\\ -a\sin(t)+a\cos(t)\end{pmatrix}\neq o \quad \text{pro} \quad t\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right).$$

Tedy

$$\int_C (x^2-y^2)\,ds=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(a^2\cos^2(t)-a^2\sin^2(t)\right)\|\varphi'(t)\|\,dt.$$

Jest

$$\|\varphi'(t)\|^2=a^2\sin^2(t)+a^2\cos^2(t)+\left(a\cos(t)-a\sin(t)\right)^2$$
$$=a^2+a^2\left(\cos^2(t)-2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)\right)$$
$$=a^2+a^2\left(1-\sin(2t)\right)=a^2\left(2-\sin(2t)\right),$$

tedy $\|\varphi'(t)\|=a\sqrt{2-\sin(2t)}$.

Takže

$$\int_C (x^2-y^2)\,ds = \int_{\pi/4}^{\pi/2} a^2\left(\cos^2(t)-\sin^2(t)\right)\cdot a\sqrt{2-\sin(2t)}\,dt$$

$$= a^3\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2t)\sqrt{2-\sin(2t)}\,dt\,.$$

Provedeme substituci

$$\tau = 2-\sin(2t) \qquad \begin{array}{c||c|c} t & \pi/4 & \pi/2 \\ \hline \tau & 1 & 2 \end{array}\,,$$

$$d\tau = -2\cos(2t)$$

a dostaneme

$$\int_C (x^2-y^2)\,ds = a^3\int_1^2 -\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\,d\tau$$

$$= -\frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{3}\tau^{3/2}\right]_1^2$$

$$= -\frac{a^3}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Příklad D3. Naleznete 2π-periodickou funkci f, která je na $(-\pi,\pi]$ definovaná předpisem

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Naleznete maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtete číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+1}.$$

Řešení: Položme

$$f(t) = e^{-\frac{t-2k\pi}{2}} \quad \text{pro } t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in P^{2\pi}$. Dále je f klesající na $(-\pi,\pi]$, a tedy $f \in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je f spojitá na $(-\pi,\pi]$.

Spočítáme Fourierovy koeficienty f. Jest

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi}\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}.$$

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \cos(kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sin(kt)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\left(\left[e^{-\frac{t}{2}} \frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\frac{-\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\cos(-k\pi) - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(k\pi)\right) - \frac{1}{4k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_k}{4k^2},$$

takže

$$a_k\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

a tedy

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k^2\pi}\cdot\frac{4k^2}{4k^2+1}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{4}{4k^2+1}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Dále jest pro $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \sin(kt)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[e^{-\frac{t}{2}} \frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\frac{-\cos(kt)}{k}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos(k\pi)}{k} - e^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos(k\pi)}{k}\right) - \frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} \cos(kt)\, dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_k}{2k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{(-1)^k}{2k\pi}\frac{4}{4k^2+1}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4k^2+1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi k} 2\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{4k^2}{4k^2+1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{8k}{4k^2+1}.$$

Tedy

$$s^f(t) = \frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1}\left(\cos(kt) + 2k\sin(kt)\right).$$

Protože $f \in BV([-\pi,\pi])$, podle Jordanova-Dirichletova kritéria platí

$$s^f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t-2k\pi}{2}}, & t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right), & t = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Protože f je spojitá na $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, platí $s^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na těchto intervalech. Maximalita těchto intervalů plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty, protože f není spojitá v $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Speciálně pro $t=0$ platí

$$1 = \frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1},$$

takže

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$