MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST C

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad C1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 5y + 3t, \\ y' &= -x + 4y + 5t. \end{aligned}$$

Příklad C2. Spočtěte

$$\int_{H(\Omega)} |z| \, d\mathcal{H}^2,$$

kde

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \right\}.$$

Příklad C3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right|.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Teoretická část

Otázka C4. Napište definici pojmu: *zobecněná řada, součet zobecněné řady.*

Otázka C5. Napište znění věty: *důsledky Diniova kritéria* (Věta 23.16).

Otázka C6. Zformulujte a dokažte větu: *vlastnosti vektorového součinu* (Věta 20.12).

$$\boxed{C1} \quad \begin{aligned} x' &= 2x + 5y + 3t \\ y' &= -x + 4y + 5t \end{aligned}$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-2 & -5 & 3t \\ 1 & \lambda-4 & 5t \end{array}\right) \cdot(-(\lambda-2)) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\lambda^2+6\lambda-13 & 13t-5 \\ 1 & \lambda-4 & 5t \end{array}\right)$$

$$-(\lambda-2)(\lambda-4)-5 = -\lambda^2+6\lambda-13$$
$$-(\lambda-2)5t+3t = -5+10t+3t = 13t-5$$

1. řádek

$-y'' + 6y' - 13y = 13t-5$

charakteristický polynom $\xi^2 - 6\xi + 13$, $\xi_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$

F.S.: $e^{3t}\cos 2t$, $e^{3t}\sin 2t$

speciální pravá strana $e^0((13t-5)\cos 0 + 0 \sin 0)$

partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(t) = At+B$

$y_p'(t) = A$

$y_p''(t) = 0$

Dosazení $\quad 6A - 13At - 13B = 13t-5$

$-13A = 13 \Rightarrow A = -1$

$6A - 13B = -5$

$-13B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{13}$

$y_p(t) = -t - \frac{1}{13}$

$y(t) = y_p(t) + [F.S.] = -t - \frac{1}{13} + c_1 e^{3t}\cos 2t + c_2 e^{3t}\sin 2t$

$y'(t) = -1 + 3c_1 e^{3t}\cos 2t - 2c_1 e^{3t}\sin 2t + 3c_2 e^{3t}\sin 2t + 2c_2 e^{3t}\cos 2t$

2. řádek

$y' = -x + 4y + 5t$

$x = -y' + 4y + 5t$

$= 1 + e^{3t}\cos 2t(-3c_1 - 2c_2) + e^{3t}\sin 2t(2c_1 - 3c_2) - 4t - \frac{4}{13} + 4c_1 e^{3t}\cos 2t +$

$+ 4c_2 e^{3t}\sin 2t + 5t$

$$= t + \frac{9}{13} + e^{3t}\cos 2t\,(c_1 - 2c_2) + e^{3t}\sin 2t\,(2c_1 + c_2)$$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{9}{13} \\ -t - \frac{1}{13} \end{pmatrix} + e^{3t}\cos 2t \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} + e^{3t}\sin 2t \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$

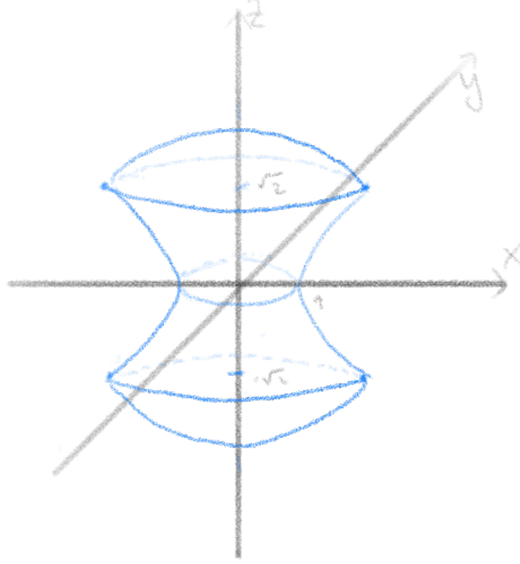
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C 2

Spočtěte $\int_{H(\Omega)} |z| \, d\mathcal{H}^2$, kde

$$\Omega = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; x^2+y^2 \leq 1+z^2, \; x^2+y^2+z^2 \leq 5 \}.$$

<u>Řešení</u> $n=3, k=2$. Použijeme area formuli.



$f(x,y,z) = |z|$ je borelovská.

$$1+z^2+z^2=5 \Rightarrow 2z^2=4$$
$$z = \pm\sqrt{2}$$

$$H_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; x^2+y^2+z^2=5, \; z \in (\sqrt{2}, \sqrt{5}]\}$$

$$H_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; x^2+y^2 = 1+z^2, \; z \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

$$H_3 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; x^2+y^2+z^2=5, \; z \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{2})\}$$

$$C_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; z=\sqrt{2}, \; x^2+y^2=3\}$$

$$C_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, \; z=-\sqrt{2}, \; x^2+y^2=3\}$$

$$H(\Omega) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup C_1 \cup C_2 \quad \text{(borelovské)}$$

C_1, C_2 jsou kružnice, tedy lipschitzovské obrazy intervalu $[0, 2\pi)$, tedy $\mathcal{H}^1(C_1 \cup C_2) < \infty$, tedy $\mathcal{H}^2(C_1 \cup C_2) = 0$.

$$\int_{H(\Omega)} |z| \, d\mathcal{H}^2 = \int_{H_1} |z| \, d\mathcal{H}^2 + \int_{H_2} |z| \, d\mathcal{H}^2 + \int_{H_3} |z| \, d\mathcal{H}^2 + \int_{C_1 \cup C_2} |z| \, d\mathcal{H}^2$$

$$= 2\int_{H_1} |z| \, d\mathcal{H}^2 + \int_{H_2} |z| \, d\mathcal{H}^2 \quad \text{ze symetrie.}$$

ad H_1

parametrizujeme

$$\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ \sqrt{5-r^2} \end{pmatrix}, \quad G_1 = (0,\sqrt{3}) \times (-\pi,\pi) \quad \text{otevřená}$$

$$\varphi'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ \frac{-r}{\sqrt{5-r^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{vol}\varphi' = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1+\frac{r^2}{5-r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{5}\, r}{\sqrt{5-r^2}} > 0$$

φ je prosté $\left(\begin{pmatrix} r_1\cos\alpha_1 \\ r_1\sin\alpha_1 \\ \sqrt{5-r_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2\cos\alpha_2 \\ r_2\sin\alpha_2 \\ \sqrt{5-r_2^2} \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = r_2 \text{ (ze 3. složky)} \right.$

$\left. \text{a tedy } \begin{matrix} \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Big)$

a regulární (C_1 a φ' je prosté)

$$\int_{H_1} |z|\, d\mathcal{H}^2 \overset{A.F.}{=} \int_{G_1} \sqrt{5-r^2}\cdot\frac{\sqrt{5}\,r}{\sqrt{5-r^2}}\, d\lambda^2 + \underbrace{\int_{\{[-r,0,\sqrt{5-r^2}],\, r\in[0,\sqrt{3})\}} |z|\, d\mathcal{H}^2}_{=0} = (*_1)$$

neboť $(-r,0,\sqrt{5-r^2})$ je lipschitzovská na $[0,\sqrt{3})$, tedy $\mathcal{H}^1(\{[\,,\,]\}) \lesssim \mathcal{H}^1([0,\sqrt{3}))$ a tedy $\mathcal{H}^2(\{\}) = 0$.

$$(*_1) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{5}\, r\, dr\, d\alpha = 2\sqrt{5}\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{5}\pi$$

ad H_2

parametrizujeme

$$\xi(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+z^2}\cos\alpha \\ \sqrt{1+z^2}\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}, \quad G_2 = (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \times (-\pi,\pi) \quad \text{otevřená}$$

$$\xi'(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\alpha & -\sqrt{1+z^2}\sin\alpha \\ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\alpha & \sqrt{1+z^2}\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{vol}\xi'(z,\alpha) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1+\frac{z^2}{1+z^2} & 0 \\ 0 & 1+z^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+2z^2} > 0$$

ξ je prosté $\left(\begin{pmatrix} \sqrt{1+z_1^2}\cos\alpha_1 \\ \sqrt{1+z_1^2}\sin\alpha_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+z_2^2}\cos\alpha_2 \\ \sqrt{1+z_2^2}\sin\alpha_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2 \right.$

a tedy $\left.\begin{matrix} \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$)

ξ je regulární ($\xi \in C^1$, ξ' je prosté)

$$\int_{H_2} |z| \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=} \int_{G_2} |z| \sqrt{1+2z^2} \, d\lambda^2 + \underbrace{\int_{\{[\sqrt{1+z^2},0,z],\ z\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}} |z| \, d\mathcal{H}^2}_{=0} = (*_2)$$

neboť $(\sqrt{1+z^2},0,z)$ je lipschitzovská na $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\mathcal{H}^1(\{[\ ,\ ,\ ]\}) \lesssim \mathcal{H}^1((-\sqrt{2},\sqrt{2})) < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{H}^2(\{[\sqrt{1+z^2},0,z],\ z\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}) = 0$

$$(*_2) = 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{1+2z^2}\, dz\, d\alpha = \left[\begin{matrix} t = 1+2z^2 \\ dt = 4z\,dz \\ \begin{array}{c|c|c} z & 0 & \sqrt{2} \\ \hline t & 1 & 5 \end{array} \end{matrix}\right] = \pi\int_1^5 \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \pi\left[2\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^5 = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}^3 - 1\right)$$

Závěr

$$\int_{H(\Omega)} |z| \, d\mathcal{H}^2 = 2\cdot 3\sqrt{5}\pi + \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) = \frac{\pi}{3}\left(28\sqrt{5}-2\right)$$

Příklad C3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left|\, |t| - \frac{\pi}{2} \right| .$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení. Položme

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left|\, |t - 2l\pi| - \frac{\pi}{2} \right|, \quad t \in (-\pi + 2l\pi, \pi + 2l\pi], \; l \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in \mathcal{P}^{2\pi}$ a f je sudá. Pro její Fourierovy koeficienty tedy platí $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(kt)\,dt$$

$$= \quad \underline{I} \quad + \quad \underline{II} \quad ,$$

substituce v $\underline{II}$: $\quad s = \pi - t \quad$ $ds = -dt$ $\quad \begin{array}{c||c|c} t & \pi/2 & \pi \\ \hline s & \pi/2 & 0 \end{array}$, $\quad t = \pi - s$

$$\cos(kt) = \cos(k(\pi - s)) = \cos(k\pi - ks) =$$

$$= \cos(k\pi)\cos(ks) + \sin(k\pi)\sin(ks)$$

$$= (-1)^k \cos(ks) ,$$

takže

$$\underline{II} = \frac{2}{\pi}(-1)^k \int_0^{\pi/2} s\cos(ks)\,ds ,$$

a tedy

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(1 + (-1)^k\right)\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt .$$

Odtud dostáváme

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ liché} \\ \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(kt) & \text{pro } k \text{ sudé}, \end{cases}$$

to jest

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2j+1,\ j \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt , & k = 2j,\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt = \left[t\,\frac{\sin(2jt)}{2j}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2jt)}{2j}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi j)}{2j} - \left[-\frac{\cos(2jt)}{4j^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{\cos(\pi j)-1}{4j^2}$$

$$= \frac{(-1)^j-1}{4j^2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j=2m,\ m\in\mathbb{N}, \\ -\dfrac{1}{2j^2} & \text{pro } j=2m+1,\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

Tedy $a_{4m+2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{2(2m+1)^2} = -\frac{2}{\pi(2m+1)^2}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$a_k = 0$ pro $k=4m,\ 4m+1,\ 4m+3,\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Odtud dostáváme

$$s^f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((4m+2)t)}{(2m+1)^2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Protože f je po částech monotónní na $[-\pi,\pi]$, platí $f\in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je f spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy platí $s_m^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy díky periodicitě f platí $s_m^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Platí tedy

$$\frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left((4m+2)t\right)}{(2m+1)^2}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Položme $t=0$. Dostaneme

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

a tedy $$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$