MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST B

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad B1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2y + 3x + e^{-t}, \\ y' &= -6x - 5y + te^{-t}. \end{aligned}$$

Příklad B2. Nechť $a > 0$. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c (e^x \sin(y) - 2y)\ dx + (e^x \cos(y) - 2)\ dy,$$

kde c je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadané předpisem

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < ax,\ y > 0 \right\}.$$

Příklad B3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = |\sin(t) + t|$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2 - 1} \right).$$

Teoretická část

Otázka B4. Napište definici pojmu: *separabilní metrický prostor, ε-síť, totálně omezený metrický prostor.*

Otázka B5. Napište znění věty: *area formule* (Věta 20.11).

Otázka B6. Zformulujte a dokažte větu: *zobecněný součet na* $\mathbb{N}$ (Věta 21.12).

Příklad B1. $\quad x' = 2y + 3x + e^{-t}$

$\quad\quad\quad\quad y' = -6x - 5y + te^{-t}$

<u>Řešení:</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-3 & -2 & e^{-t} \\ 6 & \lambda+5 & te^{-t} \end{array}\right) \tfrac{1}{2}(\lambda+5) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda-3 & -2 & e^{-t} \\ \tfrac{1}{2}(\lambda+3)(\lambda-1) & 0 & te^{-t} + 2e^{-t} \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}(\lambda+5)(\lambda-3)+6 = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - 3\lambda + 5\lambda - 15) + 6 = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = \tfrac{1}{2}(\lambda+3)(\lambda-1)$$

$$\tfrac{1}{2}(\lambda+5)\cdot e^{-t} = -\tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{5}{2}e^{-t} = 2e^{-t}$$

2. řádek

$$\tfrac{1}{2}(x'' + 2x' - 3x) = te^{-t} + 2e^{-t}$$

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}(2t+4)$$

charakteristický polynom $\xi^2 + 2\xi - 3 = (\xi+3)(\xi-1)$, $\xi_1 = -3$, $\xi_2 = 1$

F.S.: e^{-3t}, e^{t}

speciální pravá strana $e^{(-1)t}\cdot((2t+4)\cos 0 + 0\cdot\sin 0)$, -1 není kořenem ch.p.

partikulární řešení hledáme ve tvaru $x_p(t) = e^{-t}(At+B)$

$$x_p'(t) = -e^{-t}(At+B) + e^{-t}A = e^{-t}(-At - B + A)$$

$$x_p''(t) = -e^{-t}(-At - B + A) - e^{-t}A = e^{-t}(At + B - 2A)$$

Dosazení:

$$e^{-t}(At + B - 2A) + 2e^{-t}(-At - B + A) - 3e^{-t}(At+B) = e^{-t}(2t+4)$$

$$e^{-t}\left(t(A - 2A - 3A) + B - \cancel{2A} - 2B + \cancel{2A} - 3B\right) = e^{-t}(2t+4)$$

$$-4A = 2 \quad \Rightarrow A = -\tfrac{1}{2}$$

$$-4B = 4 \quad \Rightarrow B = -1$$

$$x_p(t) = e^{-t}\left(-\tfrac{1}{2}t - 1\right)$$

$$x(t) = x_p(t) + [F.S.] = e^{-t}\left(-\tfrac{1}{2}t - 1\right) + c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$x'(t) = -e^{-t}\left(-\tfrac{1}{2}t - 1\right) - \tfrac{1}{2}e^{-t} + c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t} = e^{-t}\left(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\right) + c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t}$$

1. řádek

$$x' = 2y + 3x + e^{-t}$$

$$y = \tfrac{1}{2}(x' - 3x - e^{-t}) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-t}\left(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\right) + c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t} + 3e^{-t}\left(+\tfrac{1}{2}t + 1\right) - 3c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t} - e^{-t}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{-t}\left(2t + \tfrac{5}{2}\right) - 2c_1 e^{t} - 6c_2 e^{-3t}\right) = e^{-t}\left(t + \tfrac{5}{4}\right) - c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t}$$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\left(-\frac{1}{2}t - 1\right) \\ e^{-t}\left(t + \frac{5}{4}\right) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

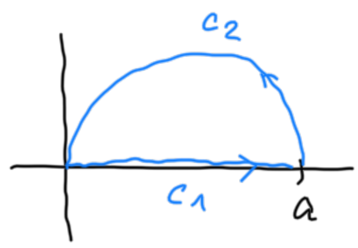
Příklad B2. Nechť $a>0$. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c \left(e^x \sin(y) - 2y\right) dx + \left(e^x \cos(y) - 2\right) dy,$$

kde c je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadané předpisem

$$\Omega = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2 < ax,\ y>0 \}$$

Řešení. 1) pomocí Greenovy-Jordanovy věty



parametrisace křivky c

položme
$$c(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0,a] \\ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t-a) \\ \frac{a}{2}\sin(t-a) \end{pmatrix}, & t \in [a, a+\pi]. \end{cases}$$

Potom $c : [0, a+\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c \in \mathcal{C}^1([0,a]) \cap \mathcal{C}^1([a,a+\pi])$ a

$c(a-) = c(a+) = [a,0]$, takže c je po částech regulární.

Dále $c(0) = c(a+\pi) = [0,0]$, takže c je uzavřená.

Ověříme, že c je jednoduchá. Předpokládejme, že $c(t_1) = c(t_2)$

pro nějaká $t_1, t_2 \in [0, a+\pi]$. Potom

je-li $t_1, t_2 \in [0,a]$, pak $\begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tedy $t_1 = t_2$,

je-li $t_1, t_2 \in [a, a+\pi]$, pak $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t_1-a) \\ \frac{a}{2}\sin(t_1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t_2-a) \\ \frac{a}{2}\sin(t_2-a) \end{pmatrix}$, tedy

$$\cos(t_1-a) = \cos(t_2-a), \text{ a tedy } t_1 = t_2,$$

a konečně je-li $t_1 \in [0,a]$, $t_2 \in (a, a+\pi)$, pak $\begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t_2-a) \\ \frac{a}{2}\sin(t_2-a) \end{pmatrix}$,

tedy $\sin(t_2-a) = 0$, takže tato situace nemůže nastat.

Odtud plyne, že c je jednoduchá.

normála: Pro $x \in (0,a)$, $y=0$ položme $h_1(x,y) = -y$, potom existuje okolí bodu $[x,y]$, na němž je h_1 rozhraničující pro Ω, neboť $h_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ a $\nabla h_1(x,y) = (0,-1) \neq \vec{0}$. Pro $x \in (0,a)$, $y = \sqrt{ax-x^2}$ položme $h_2(x,y) = x^2+y^2-ax$. Potom existuje okolí bodu $[x,y]$, na němž je

h_2 rozhraničující funkce pro Ω, neboť $h_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a

$\nabla h_2(x,y) = (2x-a, 2y) \neq o$.

<u>kontrola orientace</u>

Musíme ověřit podmínku $\exists t \in [0, a+\pi] : \det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) > 0$.

Je-li $t \in (0,a)$, potom $\nu_\Omega(c(t)) = \dfrac{\nabla h_1(c(t))}{\|\nabla h_1(c(t))\|} = \dfrac{(0,-1)}{\|(0,-1)\|} = (0,-1)$.

Je-li $t \in (a, a+\pi)$, potom

$$\nu_\Omega(c(t)) = \frac{\nabla h_2(c(t))}{\|\nabla h_2(c(t))\|} = \frac{(a\cos(t-a), a\sin(t-a))}{\|(a\cos(t-a), a\sin(t-a))\|} = (\cos(t-a), \sin(t-a)).$$

Dále platí

$$c'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pro } t \in (0,a) \\ \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}\sin(t-a) \\ \frac{a}{2}\cos(t-a) \end{pmatrix} & \text{pro } t \in (a, a+\pi). \end{cases}$$

Tedy pro $t \in (0,a)$ je $\det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$

a pro $t \in (a, a+\pi)$ je

$$\det\left(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)\right) = \det\begin{pmatrix} \cos(t-a) & -\frac{a}{2}\sin(t-a) \\ \sin(t-a) & \frac{a}{2}\cos(t-a) \end{pmatrix} = \frac{a}{2} > 0.$$

Tedy libovolné $t \in (0,a) \cup (a, a+\pi)$ stačí k ověření kontroly orientace

<u>výpočet integrálu pomocí Greenovy-Jordanovy věty</u>

Položme $G = \mathbb{R}^2$, $f = (e^x\sin(y) - 2y, e^x\cos(y) - 2)$. Potom $f \in C^1(G)$,

$\Omega = \operatorname{Int} c$, $\overline{\Omega} \subset G$. Dále platí

$$\operatorname{curl} f(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = e^x\cos(y) - (e^x\cos(y) - 2) = 2.$$

Podle Greenovy-Jordanovy věty tedy platí

$$\int_c f \cdot dc = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{curl} f \, d\lambda^2 = \int_\Omega 2 \, d\lambda^2 = 2\lambda^2(\Omega) =$$

Fubini

$$= 2\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} dy \, dx = 2\int_0^a \sqrt{ax-x^2} \, dx$$

$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin(t)$

$dx = \frac{a}{2}\cos(t)\,dt$

x	$-a$	a
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\sin(t)-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\sin(t)+\frac{a^2}{4}\sin^2(t)\right)}\ \frac{a}{2}\cos(t)\,dt$$

$$= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\sin^2(t)}\ \cos(t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2(t)}\ \cos(t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi a^2}{4}}}.$$

2) pomocí Greenovy věty

Položme $g_1(x,y) = (x-\frac{a}{2})^2+y^2$, $g_2(x,y) = y$ pro $[x,y]\in\mathbb{R}^2$. Potom g_1, g_2 jsou spojité funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ a $\Omega = g_1^{-1}((-\infty,0)) \cap g_2^{-1}((0,\infty))$. Protože $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}$, jsou $g_1^{-1}((-\infty,0))$ a $g_2^{-1}((0,\infty))$ otevřené v $\mathbb{R}^2$. Protože Ω je konečný průnik otevřených množin, je sama otevřená v $\mathbb{R}^2$.

Pro každé $[x,y]\in\Omega$ platí $x\in(0,a)$, a tedy

$\|[x,y]\|^2 = x^2+y^2 < ax < a^2$, takže $\|[x,y]\| < a$, tedy Ω je omezená.

Jest $[\frac{a}{2},\frac{a}{4}]\in\Omega$, neboť $y=\frac{a}{4}>0$ a $x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16} < \frac{a^2}{2} = ax$.

Tedy Ω je neprázdná.

Hranici $H(\Omega)$ tvoří sjednocení úsečky a polokružnice. Obě tyto množiny jsou lipschitzovskými obrazy uzavřených intervalů, tedy $\mathcal{H}^1(H(\Omega))<\infty$.

Stejně jako výše určíme rozlamující funkce h_1, h_2. Odtud vyplývá, že $H(\Omega)\setminus H_*(\Omega) \subset \{[0,0],[0,a]\}$, a tedy $\mathcal{H}_1(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega)) = 0$.

Stejně jako výše určíme $\nu_\Omega(c(t))$ pro $t\in(0,a)\cup(a,a+\pi)$. Potom

$$\tau_\Omega(c(t)) = -(\nu_\Omega(c(t))\times)$$

$$= \begin{cases} -((0,-1)\times) & \text{pro } t\in(0,a) \\ -((\cos(t-a),\sin(t-a))\times) & \text{pro } t\in(a,a+\pi) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1,0) & \text{pro } t \in (0,a), \\ (-\sin(t-a), \cos(t-a)) & \text{pro } t \in (a, a+\pi) \end{cases}$$

$$= c'(t) \text{ pro } t \in (0,a) \cup (a, a+\pi).$$

Tedy jest

$$\int_c f \cdot dc = \int_0^{a+\pi} \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt \qquad \begin{pmatrix}\text{podle definice křivkového} \\ \text{integrálu druhého druhu}\end{pmatrix}$$

$$= \int_{H(\Omega)} \langle f, \tau_\Omega \rangle \, d\mathcal{H}^1 \qquad \begin{pmatrix}\text{podle předcházejícího výpočtu} \\ \text{a parametrisace } c\end{pmatrix}$$

$$= \int_\Omega \operatorname{curl} f \, d\lambda^2 \qquad (\text{podle Greenovy věty}).$$

Zbytek výpočtu provedeme stejně jako výše.

Příklad B3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi,\pi]$

definována předpisem

$$f(t) = |\sin t + t|.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$

konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet.

Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1} \right).$$

Řešení. Rozšiřme f na $\mathbb{R}$ tak, aby byla 2π-periodická. Položme

$$f(t) = |\sin(t-2k\pi)| + |t-2k\pi| \quad \text{pro} \quad t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Protože f je sudá, platí

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\,dt \ \text{pro } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{a} \quad b_k = 0 \ \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Fourierovy koeficienty: Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin(t)+t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cdot\cos(kt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(kt)\,dt$$
$$= a_k^1 + a_k^2.$$

Jest pro $k \in \mathbb{N}$

$$a_k^1 = \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{\left[\sin(t)\cdot\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \cos(t)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt \Bigg) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(t)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[\cos(t)\cdot\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin(t))\cdot\frac{-\cos(kt)}{k^2}\,dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)\cdot(-1)^{k+1}+1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^k}{k^2} + \frac{a_k^1}{k^2}.$$

Odtud plyne pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$a_k^1 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{k^2}, \quad \text{tedy}$$

$$a_k^1 = -\frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{k^2-1} = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k \text{ liché}, \\ -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2-1}, & \text{je-li } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Dále

$$a_0^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(1-(-1)) = \frac{4}{\pi},$$

a

$$a_1^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2t)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

Podobně vypočteme

$$a_k^2 = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[t\, \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k}\, dt \right) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2},$$

a $a_0^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$. Tudíž

$$a_k^2 = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2}, & \text{je-li } k \text{ liché}, \\ 0, & \text{je-li } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Celkem $$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0^1 + a_0^2}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

a pro každé $k \in \mathbb{N}$ jest

$$a_k = a_k^1 + a_k^2 = \begin{cases} -\frac{4}{\pi(k^2-1)}, & \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{je-li } k \text{ liché}. \end{cases}$$

Fourierova řada

Platí $$s^f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kt)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\cos((2j-1)t)}{(2j-1)^2} + \frac{\cos(2jt)}{4j^2-1} \right).$$

Konvergence Fourierovy řady

Funkce f je na $[0,\pi]$ součtem rostoucí funkce t a po částech monotónní funkce $\sin(t)$. Tedy $f \in BV([0,\pi])$. Dále je f sudá, a tedy $f \in BV([-\pi,\pi])$.

Protože $\lim_{t\to\pi-} f(t) = \lim_{t\to\pi+} f(t) = \pi$ a $f \in P_{2\pi}$, je f spojitá na $\mathbb{R}$. Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy $S^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$. Podle charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence odtud plyne, že $S^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy $S^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$, neboť $f \in P_{2\pi}$.

Součet číselné řady

Položme $t=0$. Z předchozího vyplývá, že $f(0) = S^f(0)$, tedy

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1}\right).$$

Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4j^2-1}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}}.$$