MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST A

LUBOŠ PICK

POČETNÍ ČÁST

Příklad A1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 3y - 30e^t, \\ y' &= 15x - 6y + 45t. \end{aligned}$$

Příklad A2. Spočtěte tok vektorového pole $f(x,y,z) = (x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y)$ hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω zadané předpisem

$$\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2z^2,\ 0 < z < 2\right\},$$

která je otevřená, omezená, neprázdná a splňuje $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$ (tato fakta již není třeba ověřovat). Ostatní kroky výpočtu zdůvodněte.

Příklad A3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ t & \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

TEORETICKÁ ČÁST

Otázka A4. Napište definici pojmu: *k-rozměrná Hausdorffova míra.*

Otázka A5. Napište znění věty: *neurčitý Lebesgueův integrál* (Věta 22.10).

Otázka A6. Zformulujte a dokažte větu: *charakterisace Baireových prostorů* (Věta 19.6).

A1

$$x' = 6x - 3y + 30e^t$$
$$y' = 15x - 6y + 45t \quad , t \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Soustava odpovídá λ-matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 6 & 3 & -30e^t \\ -15 & \lambda + 6 & 45t \end{array}\right) \quad -\frac{1}{3}(\lambda+6) \quad \sim$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}(\lambda-6)(\lambda+6) - 15 = -\frac{1}{3}(\lambda^2+9) \\ -30e^t\left(-\frac{1}{3}(\lambda+6)\right) = 10e^t + 60e^t \\ \qquad = 70e^t \end{array}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 6 & 3 & -30e^t \\ -\frac{1}{3}(\lambda^2+9) & 0 & 45t + 70e^t \end{array}\right)$$

2. řádek

$$x'' + 9x = -135t - 210e^t$$

charakteristický polynom $\xi^2 + 9$, $\xi_{1,2} = \pm 3i$, FS: $\sin 3t, \cos 3t$

1. speciální pravá strana $-135t = e^{0t}(-135t \cos 0 + 1 \sin 0)$

$0 + 0i$ není kořenem char. polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$x_{p_1}(t) = c_1 t + c_2$$
$$x_{p_1}'(t) = c_1$$
$$x_{p_1}''(t) = 0$$

Dosadíme

$$0 + 9(c_1 t + c_2) = -135t \Rightarrow c_2 = 0, \; c_1 = -15$$

$$\Rightarrow x_{p_1}(t) = -15t$$

2. speciální pravá strana $-210e^t = e^{1t}(-210 \cos 0 + 1 \cdot \sin 0)$

$1 + 0i$ není kořen ch. polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$x_{p_2}(t) = c_3 \cdot e^t$$
$$x_{p_2}'(t) = c_3 \cdot e^t$$
$$x_{p_2}''(t) = c_3 \cdot e^t$$

Dosadíme

$$c_3 \cdot e^t + 9 \cdot c_3 \cdot e^t = -210e^t \Rightarrow c_3 = -21$$

$$\Rightarrow x_{p_2}(t) = -21e^t$$

$x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$

$x(t) = -15t - 21e^t + a \cdot \sin 3t + b \cdot \cos 3t, \quad a, b \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}.$

$x'(t) = -15 - 21e^t + 3a \cdot \cos 3t - 3b \sin 3t$

1. řádek

$x' - 6x + 3y = -30e^t$

$y(t) = -10e^t - \frac{1}{3}x'(t) + 2x(t)$

$= -10e^t + 5 + 7e^t - a\cos 3t + b\sin 3t - 30t - 42e^t + 2a\sin 3t + 2b\cos 3t$

$= -45e^t - 30t + 5 + a(-\cos 3t + 2\sin 3t) + b(\sin 3t + 2\cos 3t),$

$t \in \mathbb{R}.$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -21e^t - 15t + a\sin 3t + b\cos 3t \\ -45e^t - 30t + 5 + a(-\cos 3t + 2\sin 3t) + b(\sin 3t + 2\cos 3t) \end{pmatrix},$$

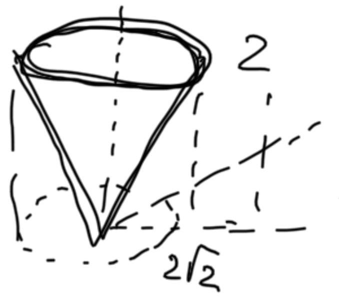
$t \in \mathbb{R}, \; a, b \in \mathbb{R}.$

PŘÍKLAD A2 Spočtěte tok vektorového pole

$$f = (x-3z,\ y+2z,\ 2z^2-y)$$

hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω definované předpisem

$$\Omega = \{ x^2+y^2 < 2z^2,\ 0<z<2 \}.$$



Řešení:

Položme

$$h_1(x,y,z) = z-2, \quad \nabla h_1 = (0,0,1) = \nu_1 \neq 0$$

$$h_2(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2, \quad \nabla h_2 = (2x, 2y, -4z),$$

$$\nu_2 = \frac{(2x, 2y, -4z)}{2\sqrt{x^2+y^2+4z^2}} = \frac{(x, y, -2z)}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}} \neq 0$$

předpoklady Gaussovy věty: $G=\mathbb{R}^n$, $f\in C^1(G)$ zřejmě platí

ověření $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=0$: funkce h_1, h_2 jsou po řadě rozhraničující na

$H_1 = \{ [x,y,2];\ x^2+y^2<8 \}$ a $H_2 = \{ [x,y,z],\ x^2+y^2=2z^2,\ 0<z<2 \}$, takže

$H(\Omega)\setminus H_*(\Omega) \subset \{[0,0,0]\} \cup \{ [x,y,2];\ x^2+y^2=8 \}$ (bod a kružnice), tedy

$\mathcal{H}^1(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))<\infty$, tedy $\mathcal{H}^2(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=0$.

výpočet toku pomocí Gaussovy věty

$$\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu_\Omega \rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \operatorname{div} f \, d\lambda^3 = \int_\Omega (2+4z)\, d\lambda^3 = (*)$$

parametrisace: $\varphi(r,t,z) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ z \end{pmatrix}$, $\quad t \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, 2)$, $r \in (0, \sqrt{2}z)$,

$$\varphi'(r,t,z) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t & 0 \\ \sin t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \varphi' = r$$

$$(*) = \int_\Omega (2+4z)\, d\lambda^3 \underset{+\text{substituce}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}z} (2+4z)\, r \, dr\, dz\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2+4z) \int_0^{\sqrt{2}z} r\, dr\, dz = 2\pi \int_0^2 (2+4z)\, z^2\, dz$$

$$= 4\pi \int_0^2 (z^2 + 2z^3)\, dz = 4\pi \cdot \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{2} \right]_0^2$$

$$= 4\pi \left(\frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{32\pi \cdot 4}{3} = \underline{\underline{\frac{128\pi}{3}}}$$

PŘÍKLAD A2 Spočtěte tok vektorového pole

$$f = (x-3z,\ y+2z,\ 2z^2-y)$$

hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω definované předpisem

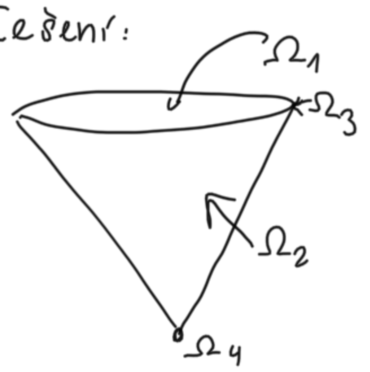
$$\Omega = \{x^2+y^2 < 2z^2,\ 0<z<2\}.$$

Řešení A2 – Pomocí Area formule

$f(x,y,y) = (x-3z,\ y+2z,\ 2z^2-y)$

$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 2z^2,\ 0<z<2\}$

Řešení:



$\Omega_1 = \{[x,y,2] : x^2+y^2 < 8\}$

$\Omega_2 = \{[x,y,z] : x^2+y^2 = 2z^2,\ z \in (0,2)\}$

$\Omega_3 = \{[x,y,2] : x^2+y^2 = 8\}$

$\Omega_4 = \{[0,0,0]\}$

$h_1(x,y,z) = z-2 \qquad \nabla h_1 = (0,0,1), \quad \nu_1 = (0,0,1) \neq 0$

$h_2(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2 \qquad \nabla h_2 = (2x,2y,-4z), \quad \nu_2 = \dfrac{(2x,2y,-4z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+16z^2}} =$

$$= \frac{(x,y,-2z)}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}} \neq 0$$

$\mathcal{H}^2(\Omega_4) = 0$, neboť Ω_4 je bod

$\mathcal{H}^2(\Omega_3) = 0$, neboť je to kružnice a $\mathcal{H}^1(\Omega_3) < \infty$.

$$\text{TOK} = \int_{H(\Omega)} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\Omega_1} \langle f, \nu_1 \rangle \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega_2} \langle f, \nu_1 \rangle \, d\mathcal{H}^2 + 0 + 0$$

$$= \int_{\Omega^1} 2z^2 - y \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}} \cdot \big((x-3z,\ y+2z,\ 2z^2-y)(x,y,-2z)\big) \, d\mathcal{H}^2$$

$\hookrightarrow x^2 - 3xz + y^2 + 2yz - 4z^3 + 2yz$

Parametrizace 1. $\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in (0, 2\sqrt{2}), \quad \alpha \in (-\pi, \pi)$

$(0, 2\sqrt{2}) \times (-\pi, \pi)$ je otevřená

$$\varphi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{vol} \varphi' = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = r \neq 0 \implies \varphi \text{ je } \overset{\text{prosté}}{\text{regulární}}$$

nepokrytost $\{[-r, 0, 2] ; r \in (0, 2\sqrt{2})\}$ lipschitzovský obraz intervalu $(0, 2\sqrt{2})$
$= \mathcal{H}^1 < \infty , \ \mathcal{H}^2 = 0$

$$\int_{\Omega_1} 2z^2 - y \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - r\sin\alpha) r \, dr \, d\alpha = 16\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha \int_0 r^2 dr$$

$= 64\pi$

Parametrizace 2.
$$\xi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r \cos\alpha \\ r \sin\alpha \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ r \in (0, 2\sqrt{2}) \quad \alpha \in (-\pi, \pi) \qquad (0, 2\sqrt{2}) \times (-\pi, \pi) \text{ otevřená}$$

$$\xi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{vol} \xi' = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r$$

ξ prosté regulární

nepokryto: $\left\{\left[-r, 0, \frac{r}{\sqrt{2}}\right], r \in (0, 2\sqrt{2})\right\}$ ... lipschitzovský obraz intervalu $(0, 2\sqrt{2})$
$\implies \mathcal{H}^1(\cdot) < \infty , \ \mathcal{H}^2(\ ) = 0$

$$\int_{\Omega^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \cdot (x^2 - 3xz + y^2 + 2yz - 4z^3 + 2yz) \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \cancel{2}4 \frac{r^2}{\cancel{2}}}} \cdot \left(r^2 \cos^2\alpha - 3 \frac{r^2}{\sqrt{2}} \cos\alpha + r^2 \sin^2\alpha + 4 \frac{r^2}{\sqrt{2}} \sin\alpha - 4 \frac{r^3}{2\sqrt{2}}\right) \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r \, dr \, d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{r\sqrt{3}} \cdot \left(r^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} r^2 \cos\alpha + \frac{4}{\sqrt{2}} r^2 \sin\alpha - 4 \frac{r^3}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \, r \, dr \, d\alpha$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} r^3 \, dr = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{8 \cdot 2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{16 \cdot 4}{4}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - 16\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\pi \cdot 16\sqrt{2} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{64}{3}\pi$$

$$TOK = 64\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi$$

<u>Příklad A3.</u> Naleznete 2π-periodickou funkci f, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\pi] \\ 2t, & t\in(-\pi,0). \end{cases}$

Spočtete Fourierovu řadu f. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje tato řada a určete její součet. Naleznete maximální intervaly, na nichž tato řada konverguje lokálně stejnoměrně.

S pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}$.

<u>Řešení!</u> <u>předpis f na $\mathbb{R}$</u>

$$f(t)=\begin{cases} t-2k\pi, & t\in[2k\pi,(2k+1)\pi] \\ 2(t-2k\pi), & t\in((2k-1)\pi,2k\pi) \end{cases}$$

<u>výpočet Fourierových koeficientů</u>

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-\pi^2\right)+\frac{1}{2\pi}\left(\pi^2-0\right)=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2t\cos(kt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos(kt)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[t\,\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)+\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right)+\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}\left(1-\cos(-k\pi)\right)+\frac{1}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi)-1\right)=\frac{1}{\pi k^2}\left(2-2(-1)^k+(-1)^k-1\right)$$

$$=\frac{1}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)=\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}=\begin{cases}\frac{2}{\pi(2j+1)^2}, & k=2j+1,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0, & k=2j,\ j\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2t\sin(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(kt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt \right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{k}(-\pi) + \frac{2}{\pi k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k}{k} = \frac{3(-1)^{k+1}}{k}.$$

Fourierova řada

$$s^f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt), \quad t\in\mathbb{R}$$

Konvergence Fourierovy řady

- f je rostoucí na $(-\pi,\pi)$, takže $f\in BV([-\pi,\pi])$, tedy podle Jordanova-Dirichletova kritéria s^f konverguje na $\mathbb{R}$ a platí

$$s^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

- f je navíc spojitá na každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, a tedy $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na těchto intervalech. Tyto intervaly jsou maximální, protože $f((2k-1)\pi-) = \pi$, $f((2k-1)\pi+) = -2\pi$, takže f není spojitá v $(2k-1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Maximalita intervalů tedy plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty.

Číselná řada

Položme $t=0$. Potom f je spojitá v t a $\sin(kt)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Tedy

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}, \quad \text{takže} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$