MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, NMMA101, ZIMNÍ SEMESTR 2018–2019
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o první část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se zejména základům diferenciálního počtu. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za inteligentní referát.

Zápočet

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni prvního semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek je možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). Tato možnost je chápána jako zcela výjimečné opravné opatření a týká se pouze studentů, kteří vyčerpají všechny tři možnosti napsání písemky. Je nutná individuální domluva s cvičícím.

Zkouška

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve středu 16.01. 2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 23.01. 2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 30.01. 2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 06.02. 2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- v pátek 15.03. 2019 ve 14:00 v posluchárně K1,

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

Date: 20. ledna 2019.

V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili včas a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (index, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- výpočet limity posloupnosti (10 bodů),
- výpočet limity reálné funkce jedné reálné proměnné (10 bodů),
- vyšetření konvergence číselné řady (10 bodů),
- vyšetření průběhu reálné funkce jedné reálné proměnné (20 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou zkoušku neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Výsledky budou zveřejněny na internetové stránce přednášejícího. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude přidělen čas ústní části zkoušky. Tento čas bude pro všechny studenty závazný, počítejte tedy s tím při plánování rozvrhu zkoušek. Podrobný rozvrh ústní části zkoušky bude též zveřejněn na internetové stránce přednášejícího. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude hodnocení jejich písemné práce podrobně vysvětleno, pokud o to projeví zájem.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat následující pracovní den po písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2 (týká se prvních čtyř termínů). U pátého termínu bude místo a čas konání ústní části zkoušky upřesněno včas.

Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 body),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou ovšem pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky (tedy i písemnou).

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 82–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–81.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení “neprospěl(a)” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. *Spočtěte limitu posloupnosti*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2. *Vyšetřete konvergenci číselné řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(3+\frac{\log n}{n}\right)^n x^n$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$ (10 bodů)

Příklad 3. *Spočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4. *Uvažujte funkci f definovanou předpisem*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases} \qquad \text{(20 bodů)}$$

- *Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je hodnota $f(x)$ dobře definovaná (tuto množinu budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$),*
- *určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ je f spojitá, případně jednostranně spojitá,*
- *určete limity f v krajních bodech definičního oboru a vyšetřete, zda má funkce asymptoty,*
- *určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f'(x)$, případně jednostranné derivace, a určete jejich hodnotu,*
- *určete intervaly a typ monotonie funkce f,*
- *nalezněte všechny lokální a globální extrémy funkce f,*
- *určete obor hodnot funkce f,*
- *určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f''(x)$ a určete její hodnotu,*
- *určete intervaly konvexity a konkávnosti funkce f,*
- *nalezněte všechny inflexní body funkce f,*
- *rozhodněte, zda funkce f má asymptotu v ∞ a/nebo v $-\infty$ a pokud ano, určete ji,*
- *načrtněte graf funkce f.*

Vzor zadání ústní části zkoušky

Otázka 1. *Napište definici klíčového pojmu:* derivace funkce.

Otázka 2. *Napište definici pojmu:* hromadná hodnota posloupnosti.

Otázka 3. *Napište znění věty:* Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.8).

Otázka 4. *Napište znění věty:* Heineova věta (Věta 4.3).

Otázka 5. *Zformulujte a dokažte větu:* vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1).

Otázka 6. *Zformulujte a dokažte větu:* d’Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.7).

Otázka 7. *Zformulujte a dokažte větu:* Bolzanova-Weierstrassova věta (Věta 2.20).

Seznam klíčových pojmů.

- prosté zobrazení, zobrazení na, bijekce, obraz množiny, vzor množiny
- supremum, infimum
- limita posloupnosti, limes superior, limes inferior
- konvergentní posloupnost, divergentní posloupnost, vybraná posloupnost
- okolí, jednostranné okolí, prstencové okolí
- součet řady, konvergentní řada, divergentní řada
- limita funkce
- spojitost funkce v bodě, spojitost funkce na intervalu
- derivace funkce

Seznam požadovaných definic.

Úvod.

- výrok, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, výroková forma
- kartézský součin, binární relace, zobrazení, definiční obor, obor hodnot, restrikce, složené zobrazení, inverzní zobrazení
- zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina, horní závora, dolní závora

Posloupnosti reálných čísel.

- shora omezená posloupnost, zdola omezená posloupnost, omezená posloupnost
- monotónní posloupnost, neklesající posloupnost, nerostoucí posloupnost, rostoucí posloupnost, klesající posloupnost, ryze monotónní posloupnost
- číslo e
- hromadná hodnota posloupnosti
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti

Řady reálných čísel.

- absolutně konvergentní řada, neabsolutně konvergentní řada

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

- rostoucí funkce, klesající funkce, nerostoucí funkce, neklesající funkce, monotónní funkce, ryze monotónní funkce
- sudá funkce, lichá funkce, periodická funkce
- funkce shora omezená, zdola omezená, omezená
- Dirichletova funkce, Riemannova funkce
- extrémy a lokální extrémy funkce

Derivace a elementární funkce.

- exponenciální funkce, logaritmus, mocnina a^b pro $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$
- goniometrické funkce, cyklometrické funkce
- n-tá derivace
- (ryze) konvexní funkce, (ryze) konkávní funkce, inflexní bod
- asymptota

Seznam požadovaných vět (není-li výslovně stanoveno jinak, jsou požadovány úplné důkazy).

Úvod.

- de Morganova pravidla (Věta 1.1)
- lemma o pevném bodu monotónního zobrazení
- Cantorova–Bernsteinova věta (Věta 1.2) bez důkazu
- Cantorova věta (Věta 1.3)
- vlastnosti spočetných množin (Věta 1.4) bez důkazu
- existence infima (Věta 1.6)

- existence celé části reálného čísla (Věta 1.7)
- Archimédova vlastnost reálných čísel (Věta 1.8) bez důkazu
- hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ (Věta 1.9)
- existence n-té odmocniny (Věta 1.10) bez důkazu

Posloupnosti reálných čísel.

- lemma (práce s epsilonem) bez důkazu
- jednoznačnost limity posloupnosti (Věta 2.1)
- charakterisace omezenosti posloupnosti (Věta 2.2) bez důkazu
- charakterisace existence limity posloupnosti (Věta 2.3) bez důkazu
- limita posloupnosti a absolutní hodnota (Věta 2.4) bez důkazu
- nulová limita posloupnosti a absolutní hodnota (Věta 2.5) bez důkazu
- vztah konvergence a omezenosti posloupnosti (Věta 2.6)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 2.7)
- aritmetika vlastních limit (Věta 2.8)
- limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou (Věta 2.9)
- limita posloupnosti a uspořádání (Věta 2.10)
- o dvou strážnících (Věta 2.11)
- nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost (Věta 2.13) bez důkazu
- věta o andělovi (Věta 2.14) bez důkazu
- věta o ďáblovi (Věta 2.15) bez důkazu
- změna konečně mnoha členů posloupnosti (Věta 2.16) bez důkazu
- aritmetika limit (Věta 2.17) bez důkazu
- nevlastní limita podílu (Věta 2.18)
- limita monotónní posloupnosti (Věta 2.19)
- Bolzanova – Weierstrassova věta (Věta 2.20)
- o vztahu limity, limes inferior a limes superior (Věta 2.21)
- o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.22)
- Bolzanova – Cauchyova podmínka pro posloupnosti (Věta 2.23)

Řady reálných čísel.

- nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1)
- Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady (Věta 3.2) bez důkazu
- řady a aritmetické operace (Věta 3.3) bez důkazu
- srovnávací kritérium (Věta 3.4)
- limitní srovnávací kritérium (Věta 3.5)
- Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 3.6)
- d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.7)
- Raabeovo kritérium (Věta 3.8) bez důkazu
- kondenzační kritérium (Věta 3.9)
- o konvergenci řady $\sum n^{-\alpha}$ (Věta 3.10)
- lemma (Abelova parciální sumace) bez důkazu
- Abelovo-Dirichletovo kritérium (Věta 3.11)
- Leibnizova věta (Věta 3.12) bez důkazu
- vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady (Věta 3.13)

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

- jednoznačnost limity funkce (Věta 4.1) bez důkazu
- vztah limity funkce a jednostranných limit (Věta 4.2) bez důkazu
- Heineova věta (Věta 4.3)
- Heineova věta pro spojitost (Věta 4.4) bez důkazu
- limita složené funkce (Věta 4.5)
- aritmetika limit funkcí (Věta 4.6) bez důkazu
- limita funkce a uspořádání (Věta 4.7) bez důkazu

- spojitost a aritmetické operace (Věta 4.8) bez důkazu
- o dvou strážnících pro funkce (Věta 4.9) bez důkazu
- o andělovi pro funkce (Věta 4.10) bez důkazu
- o ďáblovi pro funkce (Věta 4.11) bez důkazu
- nevlastní limita podílu pro funkce (Věta 4.12)
- limita monotónní funkce (Věta 4.13)
- vlastní limita funkce a omezenost (Věta 4.14)
- základní vlastnosti exponenciální funkce (Věta 4.15) bez důkazu
- základní vlastnosti sinu a kosinu (Věta 4.16) bez důkazu
- Bolzanova věta o nabývání mezihodnot (Věta 4.17)
- zobrazení intervalu spojitou funkcí (Věta 4.18)
- existence extrémů (Věta 4.19)
- vztah spojitosti a omezenosti (Věta 4.20)
- spojitost inverzní funkce (Věta 4.21)

Derivace a elementární funkce.

- vztah derivace a spojitosti (Věta 5.1)
- aritmetika derivací (Věta 5.2)
- derivace složené funkce (Věta 5.3)
- derivace inverzní funkce (Věta 5.4)
- nutná podmínka existence extrému (Věta 5.5)
- Rolleova věta (Věta 5.6)
- Lagrangeova věta (Věta 5.7)
- Cauchyova věta (Věta 5.8)
- vztah derivace a monotonie (Věta 5.9)
- l'Hospitalova pravidla (Věta 5.10) bez důkazu
- věta o limitě derivací (Věta 5.11)
- lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu) bez důkazu
- konvexita a existence jednostranných derivací (Věta 5.12)
- konvexita a spojitost (Věta 5.13)
- druhá derivace a konvexita (Věta 5.14)
- nutná podmínka pro inflexi (Věta 5.15)
- postačující podmínka pro inflexi (Věta 5.16)
- tvar asymptoty (Věta 5.17)