

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2018–2019

POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

OBSAH

1. Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce	1
Výsledky	2
2. Výroky, kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum	3
Výsledky	3
3. Limita posloupnosti reálných čísel	3
Výsledky	4
4. Vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy	6
Výsledky	7
5. Vyšetřování absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad s obecnými členy	8
6. Limita funkce	9
Výsledky	10
7. Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě	12
Výsledky	14
8. Průběh funkce	16

1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY, LOGIKA, MATEMATICKÁ INDUKCE

Příklad 1.1. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$.

Příklad 1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

Příklad 1.4. Dokažte následující formulky:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

Příklad 1.5. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?

(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n < 41 : \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

Příklad 1.6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}; \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n; \\ \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Příklad 1.7. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 1.8. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$, $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Příklad 1.9. (i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!

(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

Příklad 1.10. Řešte rovnice:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2 \sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

Příklad 1.11. Sečtěte: $\sin x + \dots + \sin nx$.

Příklad 1.12.

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n}.$$

Příklad 1.13. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí:

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

VÝSLEDKY

- Příklad 1.1: $(4, 6)$; $\langle 1, 2 \rangle$; $(-6, -3) \cup ((-1 - \sqrt{13})/2, (-1 + \sqrt{13})/2)$
- Příklad 1.3: $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $H(f) = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$.
- Příklad 1.4: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 1.5: (ii) $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$; (iii) $n = 41$; (iv) $n = 40$.
- Příklad 1.7: Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:

$$\begin{aligned}\cos 5x &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x, \\ \sin 5x &= 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.\end{aligned}$$

- Příklad 1.8: První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.
- Příklad 1.9: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 1.10: 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 3. rovnice: $4/3$
- Příklad 1.11: Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(x/2)} \quad \text{pro } x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak je součet roven nule.

- Příklad 1.12: Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1} .
- Příklad 1.13: Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.

2. VÝROKY, KVANTIFIKÁTORY, ZOBRAZENÍ, SUPREMUM A INFIMUM

Příklad 2.1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : (z > x \implies y < z) \\ \forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1); \\ \exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1).\end{aligned}$$

Příklad 2.2. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana): (i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec“. Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

Příklad 2.3. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

- $A = \left\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\},$
- $B = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\right\},$
- $C = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\},$
- $D = \{q \in \mathbb{Q}; q < \sqrt{3}\},$
- $E = \{\sin x \cos x; x \in \mathbb{R}\}.$

Příklad 2.4. Charakterizujte zobrazení $f : M \rightarrow L$, pro která platí

- $\forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A,$
- $\forall B \subset L : f(f^{-1}(B)) = B.$

Příklad 2.5. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q); p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\},$
- $B = \{\sin x; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\},$
- $C = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\},$
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\},$
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}.$

VÝSLEDKY

- Příklad 2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.
- Příklad 2.2: (i) B je padouch a C je poctivec;
(ii) oba jsou poctivci;
(iii) oba jsou padouši;
(iv) ano.
- Příklad 2.3: $\sup A = 0, \inf A = -1; \sup B = \frac{3}{2}, \inf B = 0; \sup C$ neexistuje, $\inf C = 0;$
 $\sup D = \sqrt{3}, \inf D$ neexistuje; $\sup E = \frac{1}{2}, \inf E = -\frac{1}{2}.$

3. LIMITA POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

Příklad 3.1. Vypočtete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}.$$

Příklad 3.2. Spočtete limity následujících posloupností:

$$\left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}, \quad \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\}, \quad \left\{ \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} \right\}.$$

Příklad 3.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}.$$

Příklad 3.4. Vypočtěte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$.

Příklad 3.5. Spočtěte limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 3.6. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 3.7. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$$

Příklad 3.8. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \left(\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1} \right).$$

Příklad 3.9. Spočtěte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

VÝSLEDKY

- Příklad 3.1: 0, 2, 2
- Příklad 3.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Příklad 3.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

5. Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

6. $2/3$

- Příklad 3.4: $1/a$

- Příklad 3.5: 1.-4. 0, 0, 0, 1

5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}} \\
&= \frac{(n^3+n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+n)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+n)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{2}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}} = 1$.

- Příklad 3.6: 1. Limita neexistuje.

2. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^3 \sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3 + \sqrt[4n]{2n}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(2n+1)^3 \sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3 + \sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$

To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

- Příklad 3.7: Platí:

$$\begin{aligned}
(n+4)^{100} - (n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 4^j - \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 3^j \\
&= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} (4^j - 3^j) = 100n^{99} + P_1(n); \\
(n+2)^{100} - n^{100} &= 200n^{99} + P_2(n),
\end{aligned}$$

kde P_1 , P_2 jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 + \frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200 + \frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

- Příklad 3.8: Platí

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}. \end{aligned}$$

Víme, že platí:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : |\sin(n+1)| \leq 1,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) = \frac{1}{2}.$$

- Příklad 3.9: 3, 1/2

4. VYŠETŘOVÁNÍ KONVERGENCE ČÍSELNÝCH ŘAD S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Příklad 4.1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

Příklad 4.2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

Příklad 4.3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n - 2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}).$$

Příklad 4.4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}.$$

Příklad 4.5. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

Příklad 4.6. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

VÝSLEDKY

- Příklad 4.1: Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.
- Příklad 4.2: Konverguje, diverguje, konverguje.
- Příklad 4.3, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.3, 2):

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1} - 2(n+1)}}{\frac{3}{2^n - 2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.3, 3): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1} + (-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1} + (-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}}{1 + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}}} \right)}{\frac{2^n}{3^n} \left(\frac{1 + (-1)^n \frac{n}{2^n}}{1 + (-1)^n \frac{n}{3^n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}}{1 + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1 + (-1)^n \frac{n}{2^n}}{1 + (-1)^n \frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$;
- (2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.3, 4): Označme $a_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 - 1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

- Příklad 4.4, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.4, 2): Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+1}} \cdot \frac{4^n + 5^n}{3^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n} + 4}{\frac{4^{n+1}}{5^n} + 5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n} + 1}{\frac{3^n}{4^n} + 1} = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.4, 3): Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.
- Příklad 4.5: $(-1, 1)$, $\mathbb{R}$, $\langle -1/2, 1/2 \rangle$, $(-3, 3)$.
- Příklad 4.6: $(-1, 1)$, $\langle -1, 1 \rangle$, $\langle -1, 1 \rangle$.

5. VYŠETŘOVÁNÍ ABSOLUTNÍ A NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE ČÍSELNÝCH ŘAD S OBEČNÝMI ČLENY

Příklad 5.1. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{3} - 1 \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{58} n}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{4}; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \left(\sqrt{n^6 + n} - n^3 \right). \end{aligned}$$

Příklad 5.2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}. \end{aligned}$$

Příklad 5.3. Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\log a}}{n}, \quad x \geq 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad a > 1.$$

Příklad 5.4. Nalezněte součet řad

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1, \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^n x^k y^{n-k}, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

Výsledky. • Cvičení 5.1: (i), (ii), (iii) konvergují neabsolutně, (iv) konverguje absolutně;

- Cvičení 5.2: (i) konverguje neabsolutně, (ii) diverguje, (iii) konverguje neabsolutně, (iv) konverguje neabsolutně;
- Cvičení 5.3: (i) diverguje pro $x = 0$, konverguje neabsolutně pro $0 < x \leq 1$, konverguje absolutně pro $x > 1$;
 (ii) diverguje pro $q \leq \frac{1}{2}$, konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2} < q \leq 1$, konverguje absolutně pro $q > 1$;
 (iii) konverguje neabsolutně pro každé $a > 1$;
- Cvičení 5.4: (i) $\left(\frac{1}{1-x} \right)^2$, (ii) $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, (iii) $e - 1$.

6. LIMITA FUNKCE

Příklad 6.1. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

Příklad 6.2. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 6.3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 7x} - x \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 6.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(1+2^x) \log \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

Příklad 6.5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\frac{\pi}{6} + x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 6.6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

Příklad 6.7. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 6.8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

VÝSLEDKY

- Příklad 6.1: $2, 1/2, -1$
- Příklad 6.2: $-1/16, 3/2, 1/n, 1/4$
- Příklad 6.3: $7/3, -1/2, 0$
- Příklad 6.4: $0, 1/e, 2/3, \log 8$
- Příklad 6.5:

2. Platí

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}). \end{aligned}$$

Víme, že

- (i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$,
- (iv) $\sin$ je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
- (v) $\sqrt{\cdot}$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} = 1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\sin$ je prostá funkce na jistém okolí 0,
- $\arcsin$ je prostá funkce,
- $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2 \sin(\pi/6 + x)}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right). \quad (\star)
 \end{aligned}$$

Víme, že

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

• Příklad 6.6:

1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x \\
 &= \exp \left(\log \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x \right) \right) \\
 &= \exp \left(x \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1} \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} \right). \quad (\star)
 \end{aligned}$$

Dále platí:

- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2x - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$,
- funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} = 1. \quad (**)$$

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} = 1. \quad (***)$$

Z (*), (**), (***) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n = e.$$

2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x) = x(2^{\frac{1}{x}} - 1)$ v ∞ . Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{x}} - 1}{\frac{\log 2}{x}} \cdot \log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{x} = 0$,
- $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0$,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

3. 1.

- Příklad 6.7: $1/e, 1/2, 4/3$
- Příklad 6.8: 0

7. DERIVACE FUNKCE, L'HOSPITALOVO PRAVIDLO, VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Příklad 7.1. Spočtěte:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

Příklad 7.2. Spočtěte následující limity:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$$

Příklad 7.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{pro } x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 7.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$

Příklad 7.5. Spočtěte limity následujících funkcí:

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} x} \right)^x.$$

Příklad 7.6. Spočtěte derivace (i jednostranné, pokud oboustranná neexistuje) následujících funkcí:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ f(x) &= \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}; \\ f(x) &= \sqrt{1 - e^{-x^2}}; \\ f(x) &= \arccos \frac{1}{1 + x^2}; \\ f(x) &= \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases} \\ f(x) &= x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0; \\ f(x) &= \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}. \end{aligned}$$

Příklad 7.7. Nalezněte $A, B \in \mathbb{R}$, tak aby na $\mathbb{R}$ platil vztah

$$\begin{aligned} \left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) (\log(1 + x^2) - 1) \right)' \\ = (Ax + B)(\operatorname{arctg} x) \log(1 + x^2). \end{aligned}$$

Příklad 7.8. Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby na $(0, +\infty)$ platil vztah

$$\begin{aligned} \left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + \operatorname{arctg} x + \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \right)' \\ = A \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}. \end{aligned}$$

Příklad 7.9. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right), \quad x^2 \exp(-|x - 1|), \quad \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}.$$

Příklad 7.10. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ f(x) &= \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}; \\ f(x) &= \sqrt{1 - e^{-x^2}}; \\ f(x) &= \arccos \frac{1}{1 + x^2}; \\ f(x) &= \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases} \\ f(x) &= x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0; \\ f(x) &= \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}. \end{aligned}$$

Příklad 7.11. Pomocí L'Hospitalova pravidla určete následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Příklad 7.12. Pro $a > 0$, $a \neq 1$ určete

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a - 1)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 7.13. Je možné použít L'Hospitalova pravidla pro určení následujících limit?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x + 1}{(2x + \sin 2x)(\sin x + 3)^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^4} \right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Příklad 7.14. Má následující funkce derivaci v nule?

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x \log 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Příklad 7.15. Dokažte, že každá z následujících dvou rovnic má právě jeden kořen.

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

VÝSLEDKY

• Příklad 7.10:

– Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$f'_+(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$

$$f'_-(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi-} 0 = 0,$$

$$f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

$$f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$

$$f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,$$

$$f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

$$f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

$$f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

– Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} 2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- * $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- * $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$,
- * $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- * $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

- Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2 \operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

- Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \right).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) = 0,$$

neboť $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

- Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\log x + 1), \quad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} (x^{(x^x)})' &= (e^{x^x \log x})' = e^{x^x \log x} \left((x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{(x^x)} (x^x (\log x + 1) \log x + x^{x-1}), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

– Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = 5,$$

$$f'_-(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} 1 = 1,$$

$$f'_-((2k+1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = -3,$$

$$f'_+((2k+1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} 1 = 1.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.

8. PRŮBĚH FUNKCE

Příklad 8.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$

$$f(x) = \log_x e;$$

$$f(x) = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right|;$$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Příklad 8.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$f(x) = (\cos x)e^{\frac{2}{3} \sin x},$$

$$f(x) = (\log |x|)^3 - 3 \log |x|,$$

Příklad 8.3. Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x,$$

$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 1},$$