MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2018–2019
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

6. Taylorův polynom

6.1. **Základní vlastnosti.** Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a)$. Potom polynom prvního stupně t (tečna) definovaný předpisem

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

aproximuje chování f v blízkosti bodu a v následujícím smyslu:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ hledáme polynom P splňující $\operatorname{st} P \le n$ a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$ definovaný předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.**

Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

Poznámky. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$.
(a) Platí $T_1^{f,a} = t$.
(b) Platí $\operatorname{st} T_n^{f,a} \le n$ a tato nerovnost může být ostrá.
(c) Platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.

Věta 6.1 (Peanův tvar zbytku). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Lemma (příliš dobrá aproximace polynomu). *Nechť Q je polynom, $\operatorname{st} Q \le n$, $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.*

Věta 6.2 (jednoznačnost Taylorova polynomu). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující $\operatorname{st} P \le n$ a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Věta 6.3 (obecný tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a pro každé $t \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Poznámky. (a) Věta 6.3 platí i v případě $x < a$.

(b) Předpoklady Věty 6.3 lze mírně oslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x).

konec 1. přednášky (19.02.2019)

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a pro každé $t \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.3 tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!} \frac{0 - (x - a)^{n+1}}{(-(n+1)(x - \xi)^n)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \to \infty} (T_n^{\exp,0}(x) - e^x) = 0.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a pro každé $t \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - a).$$

Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Definujme funkci f předpisem

$$f(x) = (1 + x)^\alpha \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Dokažte, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\lim_{n \to \infty} (T_n^{f,0}(x) - (1 + x)^\alpha) = 0.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.3 existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x - a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n = \frac{1}{n!} Dn + 1 f(\xi)(x - \xi)^n(x - a).$$

□

6.2. **Symbol „malé o“.**

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

(b) Tvrzení Věty 6.1 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1),\ x \to a$ podle definice znamená, že $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

(d) Symbol o lze použít i na jednostranné limity.

Příklady. Platí

$$\begin{aligned} x^3 &= o(x^2),\ x \to 0, \\ x^2 &= o(x^3),\ x \to \infty, \\ x^2 &= o(e^x),\ x \to \infty, \\ 1 - x &= o(\arccos x),\ x \to 1_-, \end{aligned}$$

Věta 6.6 (aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$.*

(b) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big),\ x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big),\ x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big),\ x \to a$.*

(c) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big),\ x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big),\ x \to a$.*

(d) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big),\ x \to a$ a $\lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big),\ x \to a$.*

(e) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$.*

(f) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big),\ x \to a$.*

Důkaz. Všechna tvrzení bezprostředně plynou z věty o aritmetice limit. $\square$

Věta 6.7 (malé o složené funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y)),\ y \to b$, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)),\ x \to a$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty o limitě složené funkce. $\square$

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

konec 2. přednášky (21.02.2019)

6.3. **Taylorovy řady elementárních funkcí.**

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou** funkce f o středu a. Je-li $a = 0$, pak mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. Rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nemusí platit ani pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$, takže Taylorova řada této funkce má všechny koeficienty rovny nule. Tato řada tedy konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a to ke konstantně nulové funkci, ačkoli $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Věta 6.8 (Taylorovy řady elementárních funkcí)**.** *Platí*

(a) $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ pro $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ pro $x \in (-1, 1)$,

(e) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pro $x \in (-1, 1)$,

(f) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$.

7. Mocninné řady

7.1. **Základní vlastnosti.**

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. **Mocninnou řadou o středu** x_0 rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje pro $x = x_0$.

Věta 7.1 (o poloměru konvergence mocninné řady). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > \varrho$, je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

*kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0. Prvek ϱ nazýváme **poloměrem konvergence** uvedené řady.*

Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = x_0$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0,\infty)$, řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = x_0 \pm \varrho$.

Příklady. Spočtěte střed a poloměr konvergence následujících mocninných řad a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řady konvergují.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

konec 3. přednášky (26.02.2019)

7.2. **Derivace mocninné řady.**

Lemma. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta, \delta)$ platí*

$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \le h^2\delta^{-2}(|x|+\delta)^n.$$

Věta 7.2 (derivace mocninné řady). *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom má funkce f v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$.*

Věta 7.3 (vztah mocninné řady a Taylorova polynomu). *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom*

(a) *pro každé* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, *existuje vlastní* $f^{(k)}(x)$ *a platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

(b) *speciálně platí* $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(c) *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $T_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$.

Poznámka. Při derivování mocninné řady člen po členu se zachovává poloměr konvergence, nemusí se však zachovat konvergence v některém z bodů $x_0 \pm \varrho$. Označíme-li například $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ pro $x \in (-1,1)$, pak $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ a $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ pro $x \in (-1,1)$, poloměr konvergence všech tří řad je roven 1, ale řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ je konvergentní pro $x \in [-1,1]$, řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ je konvergentní pouze pro $x \in [-1,1)$ a řada $\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ je konvergentní dokonce pouze pro $x \in (-1,1)$.

7.3. **Abelova věta.**

Lemma. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je konvergentní číselná řada a nechť* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost jejích částečných součtů. Potom pro každé* $x \in (-1,1)$ *jsou řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ *absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

konec 4. přednášky (28.02.2019)

Věta 7.4 (Abelova)**.** *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *a* $\varrho \in (0,\infty)$.
(a) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x \to (x_0+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x \to (x_0-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

Poznámka. Platí

$$\text{(a)}\ \ \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pro } x \in [-1,1],$$

$$\text{(b)}\ \ \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pro } x \in (-1,1].$$

8. Primitivní funkce

8.1. **Základní vlastnosti.**

Definice. Nechť I je neprázdný otevřený interval a f, F jsou funkce definované na I. Řekneme, že F je **primitivní funkce k f na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje vlastní $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$. Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

Poznámka. Nechť F je primitivní funkce k f na I. Potom F je na I spojitá.

Příklad. Funkce sign nemá primitivní funkci na intervalu $\mathbb{R}$.

Poznámka. Nechť F je primitivní funkce k f na I a $c \in \mathbb{R}$. Potom je $F + c$ také primitivní funkce k f na I.

Věta 8.1 (jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval. Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na I. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.*

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I. Na levé straně rovnosti stojí množina funkcí a na pravé straně stojí libovolný její representant. Vztah $\stackrel{c}{=}$ čteme jako rovnost až na konstantu. Jednotlivé části výrazu nalevo jsou tyto:

$\int$ ... znak integrálu,

$f(x)$ ... **integrand**, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci,

dx ... **diferenciál**, symbol, jenž označuje jednak konec integrandu a jednak určuje proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Věta 8.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Potom f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\int f(ax)dx \stackrel{c}{=} a^{-1}F(ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklady.

$$\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\},\ x\in(-\infty,0),\ x\in(0,\infty),$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{c}{=} \log|x|,\ x\in(-\infty,0),\ x\in(0,\infty),$$
$$\int e^x\,dx \overset{c}{=} e^x,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \sin x\,dx \overset{c}{=} -\cos x,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \cos x\,dx \overset{c}{=} \sin x,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{tg} x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z},$$
$$\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{cotg} x,\ x\in(k\pi, \pi+k\pi),\ k\in\mathbb{Z},$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right),\ a>0,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{c}{=} \arcsin x,\ x\in(-1,1),$$
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{c}{=} \arccos x,\ x\in(-1,1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \overset{c}{=} \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R},$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \overset{c}{=} \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

konec 5. přednášky (05.03.2019)

Definice. Nechť I je interval a $f\colon I\to\mathbb{R}$. Řekneme, že f má na I **Darbouxovu vlastnost**, jestliže pro každý interval $J\subset I$ je $f(J)$ interval.

Věta 8.3 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $f\colon I\to\mathbb{R}$ a f má na I primitivní funkci. Potom má f na I Darbouxovu vlastnost.*

Poznámka. Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f\colon I\to\mathbb{R}$. Potom platí

f je spojitá na I $\Rightarrow$ f má primitivní funkci na I $\Rightarrow$ f má Darbouxovu vlastnost na I.

Ani jedna z implikací neplatí obráceně.

Příklad. Uvažujte funkci $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{pro } x=0. \end{cases}$$

Dokažte, že f má na $\mathbb{R}$ vlastní derivaci, avšak funkce f' není na $\mathbb{R}$ spojitá.

Důsledek. *Nechť I je otevřený interval a $0 \in I$. Potom funkce* sign *nemá na I primitivní funkci.*

Věta 8.4 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k funkci f na I, G je primitivní funkce k funkci g na I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom je $\alpha F + \beta G$ primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Věta 8.5 (první věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Nechť $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$. Nechť pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklad. Spočtěte $\int \sin^4 t \cos t\,dt$.

Věta 8.6 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi :
(\alpha, \beta) \to (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní a nenulová $\varphi'(t)$ a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $G\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Příklad. Spočtěte $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$, $x \in (-1, 1)$.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta 8.7 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k funkci g na I. Potom platí*

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx, \quad x \in I.$$

konec 6. přednášky (07.03.2019)

Příklad. Spočtěte $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad. Spočtěte $\int e^x \sin x\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.

8.2. **Integrace racionálních funkcí.**

Definice. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

Věta 8.8 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1,\dots,x_k,\ \alpha_1,\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta_l \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ k,l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

(iv) $p_1,\dots,p_k,\ q_1,\dots,q_l \in \mathbb{N}$,

(v) *žádný z mnohočlenů* $x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemá reálný kořen,*

(vi) *žádné dva z mnohočlenů* $x-x_1,\ x-x_2,\dots,x-x_k$, *nemají společný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1,\dots,A_{p_1}^1,\ \dots,A_1^k,\dots,A_{p_k}^k,\ B_1^1,\ C_1^1,\dots,$ $B_{q_1}^1,\ C_{q_1}^1,\dots,\ B_1^l,\ C_1^l,\dots,B_{q_l}^l,\ C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-x_1}+\dots+\frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}}+\dots+\frac{A_1^k}{x-x_k}+\dots+\frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}}\\ &\quad+\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1}+\dots+\frac{B_{q_1}^1x+C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^{q_1}}+\dots+\frac{B_1^lx+C_1^l}{x^2+\alpha_lx+\beta_l}+\dots+\frac{B_{q_l}^lx+C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_lx+\beta_l)^{q_l}}\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $Q(x) \neq 0$.

Poznámka (postup při integraci racionální funkce)**.** Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x)\,dx$ na libovolném otevřeném intervalu I, který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q, pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$,
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 8.8,
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^q}\,dx,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{N}$, pak

$$I \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-q}\frac{A}{(x-a)^{q-1}}, & x \in (-\infty,a) \text{ nebo } x \in (a,\infty), \text{ je-li } q \geq 2,\\ A\log|x-a|, & x \in (-\infty,a) \text{ nebo } x \in (a,\infty), \text{ je-li } q = 1.\end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

potom

$$I_1 \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1,\\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1.\end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\, dx = \frac{1}{(\beta - \frac{\alpha^2}{4})^q} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q}\, dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q}\, dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \int \frac{1}{(y^2+1)^q}\, dy.$$

Výsledný integrál pak spočítáme podle výše uvedeného příkladu.

Příklad. Spočtěte $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}\, dx$.

8.3. **Některé užitečné substituce.**

Značení. Symbolem $R(x,y)$ budeme značit **racionální funkci dvou proměnných**, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij} x^i y^j,$$

kde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i,j = 0,\dots,N_1(N_2)$ a $Q \not\equiv 0$.

Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(a) vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, $x \in (-\pi, \pi)$,
(b) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $t = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,
(c) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $t = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,
(d) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Je-li to možné, bývá obvykle výhodnější zvolit některou ze substitucí (b)–(d) než substituci (a).

konec 7. přednášky (12.03.2019)

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$$

Věta 8.9 (o lepení)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval $f, F\colon I \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $c \in I$ a pro každé $x \in I \setminus \{c\}$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom $F' = f$ na I.*

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Poznámka. Pro racionalisaci integrálů tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\, dx$, kde $q \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ a $ad \neq bc$, lze využít substituci $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$, $x \in I$, kde I je libovolný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})$.

Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Poznámka. Pro racionalisaci integrálů tvaru $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\,dt$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. postupujeme podle následující osnovy.

(a) Má-li trojčlen ax^2+bx+c dvojnásobný reálný kořen α a platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, potom $a > 0$ a platí
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|.$$

(b) Má-li trojčlen ax^2+bx+c dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$, a platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, potom je buď $a > 0$ a
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha_1|\sqrt{\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}} \quad \text{pro } x \in (-\infty, \alpha_1) \text{ a } x \in (\alpha_2, \infty),$$
nebo $a < 0$ a
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}} \quad \text{pro } x \in (\alpha_1, \alpha_2).$$
V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\,dx$, jejíž řešení známe. Podmínka $ad \neq bc$ je splněna, neboť v prvním případě platí $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě platí $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(c) Předpokládejme, že trojčlen ax^2+bx+c nemá reálné kořeny. Potom $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít jednu z takzvaných **Eulerových substitucí**
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \quad \text{nebo} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

konec 8. přednášky (14.03.2019)

9. Riemannův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo
$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\, j = 1, \dots, n\}.$$
Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a, b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme
$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]$$

a

$$\underline{S}(f,D)=\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j-x_{j-1}),\ \text{kde } m_j=\inf\{f(x);x\in[x_{j-1},x_j]\}.$$

Hodnotu $\overline{S}(f,D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f,D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D. Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a,b]$ předpisem

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx=\inf\{\overline{S}(f,D); D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a,b]$ předpisem

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx=\sup\{\underline{S}(f,D); D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}.$$

Definice. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je omezená. Řekneme, že f na intervalu $[a,b]$, $a<b$, má **Riemannův integrál** (případně že je na tomto intervalu **riemannovsky integrovatelná**), jestliže $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$. Jestliže $a>b$, pak klademe $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$. Jestliže $a=b$, pak klademe $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme symbolem $\mathcal{R}([a,b])$.

Příklad. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ a $c\in\mathbb{R}$. Dokažte že $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$.

Příklad. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Dokažte, že $D\notin\mathcal{R}([a,b])$.

Věta 9.1 (vlastnosti dělení)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je omezená.*

(a) *Nechť D,D' jsou dělení intervalu $[a,b]$, přičemž D' zjemňuje D. Potom*

$$\underline{S}(f,D)\le\underline{S}(f,D')\le\overline{S}(f,D')\le\overline{S}(f,D).$$

(b) *Nechť D_1,D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\underline{S}(f,D_1)\le\overline{S}(f,D_2).$$

(c) *Platí*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx\le\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx.$$

konec 9. přednášky (19.03.2019)

Příklady. Nechť R je Riemannova funkce, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Rozhodněte, zda $R\in\mathcal{R}([a,b])$, a pokud ano, spočtěte $\int_a^b R(x)\,dx=0$.

Věta 9.2 (mantinely Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ je omezená. Nechť D_1,D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Označme*

$$m=\inf\{f(x)\colon x\in[a,b]\},\quad M=\sup\{f(x)\colon x\in[a,b]\}.$$

Potom

$$m(b-a) \le \underline{S}(f, D_1) \le \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D_2) \le M(b-a).$$

Věta 9.3 (aproximace horního a dolního Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$$

a

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \ge \underline{S}(f, D) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Věta 9.4 (aproximace Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Potom*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad a \quad \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důsledek (postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu)**.** *Jestliže f je omezená funkce na $[a,b]$ a existuje posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$, potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 x^2\,dx$.

konec 10. přednášky (21.03.2019)

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Definice. Nechť I je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x-y| < \delta\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Poznámka. Nechť I je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(a) f není stejnoměrně spojitá na I,

(b) existují $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I taková, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$.

Příklad. Vyšetřete spojitost a stejnoměrnou spojitost funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$.

Příklad. Vyšetřete spojitost a stejnoměrnou spojitost funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ na $(0, \frac{1}{\pi}]$.

Věta 9.6 (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Věta 9.7 (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Věta 9.8 (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

konec 11. přednášky (26.03.2019)

Poznámka. Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Potom

$$\sup_M (f+g) \leq \sup_M f + \sup_M g, \quad \inf_M (f+g) \geq \inf_M f + \sup_M g.$$

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

(a) *Jestliže $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \quad \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) *Jestliže $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f \leq g$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

(c) *Jestliže $c \in [a,b]$, pak*

$$f \in \mathcal{R}([a,c]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap f \in \mathcal{R}([b,c])).$$

V takové případě platí

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

(d) *Jestliže $f \in \mathcal{R}([a,b])$, pak $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Poznámka. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Věta 9.10 (derivace funkce horní meze Riemannova integrálu)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f\colon J \to \mathbb{R}$ a pro každé $a, b \in J$ platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Nechť $c \in J$ a $F\colon J \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{pro } x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*

(b) *jestliže $x_0 \in \operatorname{Int} J$ a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

konec 12. přednášky (28.03.2019)

Značení. Nechť F je funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje $\lim_{x \to a+} F(x)$, pak hodnotu této limity značíme symbolem $F(a+)$. Obdobně definujeme symbol $F(a-)$.

Věta 9.11 (výpočet Riemannova integrálu spojité funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na (a,b). Potom existují vlastní $F(a+)$ a $F(b-)$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

Věta 9.12 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ právě tehdy, když*

$$\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D = \{x_j\}_{j=0}^n, D \text{ je dělení } [a,b],\ \nu(D) < \delta$$

$$\forall t_j \in [x_{j-1}, x_j],\ j \in \{1,\dots,n\}\colon \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

10. Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že **Newtonův integrál** f na (a,b) existuje, jestliže

- f má na (a,b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují $F(a+)$ a $F(b-)$,
- výraz $F(b-) - F(a+)$ je definován.

Hodnotou Newtonova integrálu f na (a,b) pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

Pro $a > b$ klademe $(N) \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ a dále definujeme $(N) \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Jestliže $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**. Množinu všech funkcí $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a,b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a,b)$.

Úmluva. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(N) \int_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka. Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci.

Značení. Nechť F je funkce a $a, b \in \mathbb{R}^*$. Jestliže má smysl výraz $F(b-) - F(a+)$, pak jeho hodnotu budeme značit symbolem $[F]_a^b$.

Věta 10.1 (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f(x) = x^\alpha$ pro $x \in (0,\infty)$. Vyšetřete existenci a konvergenci Newtonových integrálů $\int_0^1 x^\alpha\,dx$, $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ a $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$.

Příklad. Dokažte, že $\operatorname{sign} \in \mathcal{R}([-1,1]) \setminus \mathcal{N}(-1,1)$.

Příklad. Nechť $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pro } x\in(0,1)\\ 0 & \text{pro } x=0.\end{cases}$$

Dokažte, že $f\in\mathcal{N}(0,1)\setminus\mathcal{R}([0,1])$.

konec 13. přednášky (02.04.2019)

Věta 10.2 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a<b$.*

(a) *Jestliže $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha\in\mathbb{R}$, pak $f+g\in\mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f\in\mathcal{N}(a,b)$ a platí*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx,\qquad \int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx.$$

(b) *Jestliže $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $f\le g$, pak $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.*

(c) *Nechť $c\in(a,b)$. Jestliže $f\in\mathcal{N}(a,b)$, pak $f\in\mathcal{N}(a,c)\cap\mathcal{N}(c,b)$ a platí*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Jestliže $f\in\mathcal{N}(a,c)\cap\mathcal{N}(b,c)$ a f je spojitá v c, pak $f\in\mathcal{N}(a,b)$.

(d) *Jestliže $f\in\mathcal{N}(a,b)$ a f je spojitá na (a,b), pak $\int_a^b|f(x)|dx$ existuje a $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$.*

Věta 10.3 (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a<b$, a $f,g\colon(a,b)\to\mathbb{R}$. Nechť F a G jsou po řadě primitivní funkce k f a g na (a,b). Potom*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=[FG]_a^b-\int_a^b f(x)G(x)dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 10.4 (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $a<b$, $\alpha<\beta$, $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, $\varphi\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, pro každé $t\in(\alpha,\beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha,\beta))=(a,b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Věta 10.5 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f\in\mathcal{R}([a,b])\cap\mathcal{N}(a,b)$. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx=(N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

konec 14. přednášky (04.04.2019)

11. Konvergence Newtonova integrálu

Věta 11.1 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta_0 > 0$ *a* $f\colon P(a,\delta_0) \to \mathbb{R}$. *Potom existuje vlastní* $\lim_{x\to a} f(x)$ *právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a,\delta)\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Obdobná tvrzení jako ve Větě 11.1 platí i pro jednostranné limity.

Věta 11.2 (postačující podmínka pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *a* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *je omezená a spojitá. Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 11.2 neplatí.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Věta 11.3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $0 \le f \le g$, f *je spojitá na* $[a,b)$ *a* $g \in \mathcal{N}(a,b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Věta 11.4 (obecnější verse srovnávacího kritéria)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $|f| \le g$, f *je spojitá na* $[a,b)$ *a* $g \in \mathcal{N}(a,b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Poznámka. Tvrzení Vět 11.3 a 11.4 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$.

Poznámka. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ splňuje $f \in \mathcal{N}(0,\infty)$, ale $|f| \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Newtonův integrál je tedy neabsolutně konvergentní integrál (na rozdíl například od Lebesgueova integrálu).

Věta 11.5 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $|f| \in \mathcal{N}(a,b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

konec 15. přednášky (09.04.2019)

Věta 11.6 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a* $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *jsou spojité a nezáporné.*

(a) *Jestliže* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a,b)$ *právě tehdy, když* $g \in \mathcal{N}(a,b)$.
(b) *Jestliže* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *a* $g \in \mathcal{N}(a,b)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a,b)$.
(c) *Jestliže* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *a* $f \in \mathcal{N}(a,b)$, *pak* $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{x+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^5}}\, dx$.

Věta 11.7 (Newtonův integrál součinu funkcí)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá, nezáporná a nerostoucí. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \le \int_a^b fg \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b fg\right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f\right|.$$

Věta 11.8 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je monotónní a spojitá a F je primitivní funkce k f na (a,b).*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená na $[a,b)$, potom $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*

(b) *Jestliže F je omezená na (a,b) a $g(b-) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*

konec 16. přednášky (11.04.2019)

Poznámka. Tvrzení Věty 11.8 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \operatorname{arctg} x \frac{\cos x}{x}\, dx$.

Věta 11.9 (o nulové funkci). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a $(N) \int_a^b f(x)dx = 0$. Potom pro každé $x \in (a,b)$ platí $f(x) = 0$.*

Věta 11.10 (první věta o střední hodnotě). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná, $g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Věta 11.11 (druhá věta o střední hodnotě). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a monotónní. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

12. Aplikace určitého integrálu

Definice. Normovaným lineárním prostorem budeme rozumět dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ je zobrazení splňující

(a) $\forall x \in X\colon\ [\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = o]$,

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in x\colon \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(c) $\forall x,y \in X : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zobrazení $\|\cdot\|$ nazýváme **normou** na X.

konec 17. přednášky (16.04.2019)

Příklad. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$C([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá}\}.$$

Definujme $\|\cdot\|_{\max}\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\|f\|_{\max} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Dokažte, že $(C([a,b]), \|f\|_{\max})$ je normovaný lineární prostor.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme $\|\cdot\|_{\mathrm{int}}\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\|f\|_{\mathrm{int}} = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Dokažte, že $(C([a,b]), \|f\|_{\mathrm{int}}$ je normovaný lineární prostor.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C([a,b]$. Potom platí

$$\|f\|_{\mathrm{int}} \leq (b-a)\|f\|_{\max}.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $[a,b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a,b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad. Určete $\langle\varphi\rangle$, kde $\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ je definována předpisem $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^1([a,b])$. Určete $\langle\varphi\rangle$, kde $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je definována předpisem $\varphi(x) = [x, f(x)]$.

Příklad. Určete $\langle\varphi\rangle$, kde $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ je definována předpisem $\varphi(t) = [t^3, t^2]$.

Poznámka. Různé křivky mohou mít stejný geometrický obraz (například $\varphi_1(t) = [t,t]$, $\varphi_2(t) = [t^2, t^2]$).

Definice. Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

přičemž pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j - \varphi(x_j))\|$$

a

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 12.1 (Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Věta 12.2 (eukleidovský prostor)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom dvojice $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ tvoří normovaný lineární prostor.*

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množinu

$$\mathbb{R}^n = \{x = [x_1, \dots, x_n],\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\colon x_i \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **eukleidovským prostorem** a zobrazení $\|\cdot\|$ **eukleidovskou normou**.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom značíme

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \left[(N)\int_a^b f_1(x)\,dx, \dots, (N)\int_a^b f_n(x)\,dx\right].$$

Obdobně definujeme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{R}(a,b)$.

konec 18. přednášky (18.04.2019)

Poznámka. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom pro každá $x, y \in X$ platí

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a J je interval. Řekneme, že zobrazení $f\colon J \to \mathbb{R}^n$ je **spojité**, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i\colon J \to \mathbb{R}$ spojitá.

Lemma (o spojitosti eukleidovské normy)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je spojité a $\|\cdot\|$ je eukleidovská norma na $\mathbb{R}^n$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každá $x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$, platí $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Speciálně, funkce $x \mapsto \|f(x)\|$ je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každá $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \|x\|\|y\|.$$

Věta 12.3 (odhad normy integrálu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je spojité. Potom platí*

$$\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\| \le \int_a^b \|f(x)\|\,dx.$$

Věta 12.4 (délka křivky)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(x)\|\,dx.$$

Příklad. Spočtěte délku křivky $\varphi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$.

Věta 12.5 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$, $f\colon [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerostoucí a spojitá, $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $a_n = f(n)$. Potom $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(n_0, \infty)$.*

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n}$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log^2 n}$.

konec 19. přednášky (23.04.2019)

Věta 12.6 (integrální tvar zbytku)**.** *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, f je funkce taková, že pro každé $y \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(y)$. Potom*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n\, dy.$$

Důkaz. Položme

$$\varphi(y) = f(y) + f'(y)(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Potom

$$\varphi'(y) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

a

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(y)\, dy = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n\, dy.$$

Jiný důkaz: Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt,$$

tedy pro $n = 0$ yvrzení platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes počítat

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\, dt \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. □

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Potom hodnota

$$V(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

intuitivně odpovídá objemu tělesa T. Je-li navíc f' spojitá na (a, b), potom hodnota

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

intuitivně odpovídá povrchu pláště tělesa T.

13. Metrické prostory

Definice. **Metrickým prostorem** budeme rozumět dvojici (P, ϱ), kde P je množina, $\varrho\colon P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(a) $\forall x, y \in P\colon \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(b) $\forall x, y \in P\colon \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) $\forall x, y, z \in P\colon \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Funkce ϱ se nazývá **metrika na** P.

Poznámka. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu

$$B(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) < r\},$$

nazýváme **otevřenou koulí** se středem x a poloměrem r.

Věta 13.1 (vztah mezi normou a metrikou)**.** *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor a pro $x, y \in X$ definujeme $\varrho(x, y) = \|x - y\|$, potom (X, ϱ) je metrický prostor.*

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z definice metriky. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = o$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z definice normy pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)|\|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z definice metriky je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z definice normy

$$\begin{aligned} \varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z). \end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z definice metriky. Tím je důkaz dokončen. □

Definice (Příklady normovaných lineárních prostorů)**.**
(a) normy na $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

obecněji

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

(důkaz trojúhelníkové nerovnosti se probírá v přednášce z míry a integrálu). Sem spadá i eukleidovská norma volbou $p = 2$.

Dále definujme

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ se značí $\ell^p(n)$ (*v přednášce nezmíněno, ale následující příklady uvedeny pod názvem "koule vzhledem k $\|\cdot\|_p$ pro $n = \dots$"*).
Koule $B(0, r)$ v $\ell^p(1)$ je interval $(-r, r)$.

Koule $B(0,r)$ v $\ell^2(2)$ je kruh.
Koule $B(0,r)$ v $\ell^\infty(2)$ je čtverec $(-r,r)^2$.
Koule $B(0,r)$ v $\ell^1(2)$ je čtverec postavený na špičku.
Koule $B(0,r)$ v $\ell^2(3)$ je klasická koule.
Koule $B(0,r)$ v $\ell^\infty(3)$ je krychle.
Koule $B(0,r)$ v $\ell^1(3)$ je pravidelný osmistěn.

(b) Prostory posloupností. Každé posloupnosti $\boldsymbol{x} = \{x_i\}$ reálných čísel přiřaďme výrazy

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Chceme-li vytvořit normovaný lineární prostor, musíme vyloučit posloupnosti, jejichž "norma" je nekonečná. Tedy výsledné prostory se liší nejen normou, ale i jako množiny. Prostor ℓ^p se definuje jako množina všech posloupností $\boldsymbol{x}$ splňujících $\|\boldsymbol{x}\|_p < \infty$, vybavená příslušnou normou.

(c) Prostory funkcí. Kromě supremové (či maximové) normy se používají integrální normy, například na množině $\mathcal{C}([a,b])$ je integrální L^p-norma

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|\,dx\Big)^{1/p}.$$

Poznámka. Poznamenejme výslovně, že vzdálenost bodů x a y v eukleidovské metrice je

$$\|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Newyorská metrika je alternativní název pro $\ell^\infty(n)$ metriku (proč asi). $\ell^\infty(n)$ metrika se nazývá maximová, ℓ^∞ norma je supremová.

Definice. Další příklady metrik již nejsou odvozeny z norem.

Diskrétní metrika. Nechť P je množina. Pro $x, y \in P$ definujeme

$$\varrho_{\mathrm{diskr}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \neq y, \\ 0 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Potom $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ tvoří metrický prostor. V diskrétním prostoru platí

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{jestliže } r \le 1, \\ P, & \text{jestliže } r > 1. \end{cases}$$

Pampelišková metrika. Pro $x, y \in \mathbb{R}^2$ definujeme

$$\varrho_{\mathrm{pamp}}(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{pokud } x \text{ je násobkem } y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $(P, \rho_{\mathrm{pamp}})$ tvoří metrický prostor. Jak vypadají koule?

Metriku lze definovat i na množině všech posloupností. Na prostoru všech posloupností reálných čísel se nedá definovat norma tak, aby souřadnicové projekce byly spojité (viz cvičení níže), ale můžeme na nich definovat vzdálenost (inteligentnější než diskrétní)

$$\rho_\Pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \operatorname{arctg}(|y_i - x_i|).$$

Metrika z reálného života. Pro x, y ležící na nějaké silnici definujeme $\rho(x, y)$ jako silniční vzdálenost.
Námitka. Co kdybychom brali v úvahu jednosměrky?

Cvičení (Doporučené)**.** Až bude spojitost:
Neexistuje norma na $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ aby $\boldsymbol{x} \mapsto x_i$ byly spojité.
ρ_Π je metrika na $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, zobrazení $(\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x} \mapsto x_i$ jsou spojitá a konvergence v ρ_Π je konvergence po souřadnicích.

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M\times M})$ opět tvoří metrický prostor. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M\times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ). Metriku $\varrho|_{M\times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ.

Poznámka. Metrický podprostor normovaného lineárního prostoru nemusí být lineární, tím získáme spoustu příkladů metrických prostorů bez struktury normovaného lineárního prostoru.

Definice (další prostory posloupností)**.** Prostor ℓ^∞ má užitečné podprostory $c = \{\boldsymbol{x} \in \ell^\infty,\ \exists A \in \mathbb{R} : \lim x_i = A\}$, $c_0 = \{\boldsymbol{x} \in \ell^\infty,\ \lim x_i = 0\}$. Potom $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ a na všech uvažujeme stejnou normu a tudíž stejnou vzdálenost.

konec 20. přednášky (25.04.2019)

13.1. **Konvergence v metrických prostorech.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. **Posloupností** prvků P rozumíme každé zobrazení $n \mapsto x_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do prostoru P. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{x_n\}$. Prvek x_n nazýváme **n-tým členem** této posloupnosti. Množinu $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ nazýváme **množinou všech členů** posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ nazýváme **vybranou posloupností** z $\{x_n\}$, případně **podposloupností** $\{x_n\}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}$ **konverguje** k x v P, jestliže $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, případně pouze $x_n \to x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v P. **Konvergentní posloupností** rozumíme posloupnost, která má limitu v P.

Poznámka. Je-li $P = \mathbb{R}$ a $\varrho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, pak výše uvedený pojem konvergence posloupnosti splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

Věta 13.2 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor.*

(a) *Nechť* $\{x_n\}$ *je posloupnost prvků z* P *a existují* $n_0 \in \mathbb{N}$ *a* $x \in P$ *takové, že* $x_n = x$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Potom* $x_n \to x$.

(b) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(c) *Výrok* $x_n \to x$ *platí právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies x_n \in B(x, \varepsilon).$$

Důkaz. (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže $x_n \to x$.

(b) Předpokládejme, že existují $x, y \in P$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolně zvoleno, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(c) Snadné cvičení. □

Značení. Místo $x_n \to x$ budeme někdy psát $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Věta 13.3 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor,* $\{x_n\}$ *je posloupnost prvků z* P, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z* $\{x_n\}$, $x \in P$ *a* $\lim x_n = x$. *Potom* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Příklad. Nechť P je množina a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z P. Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Řešení. $\Rightarrow$ Nechť $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

$\Leftarrow$ Tato implikace platí v každém metrickém prostoru.

Poznámka (ekvivalence metrik v eukleidovském prostoru)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
$$\leq n \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \leq n \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Tedy $\varrho_1(x, y) \leq \sqrt{n} \varrho_e(x, y) \leq n \varrho_\infty(x, y) \leq n \varrho_1(x, y)$. Odtud vyplývá, že

$$x_k \overset{\varrho_1}{\to} y \quad \Leftrightarrow \quad x_k \overset{\varrho_e}{\to} y \quad \Leftrightarrow \quad x_k \overset{\varrho_\infty}{\to} y.$$

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Potom $x_k \overset{\varrho_e}{\to} y$ právě tehdy, když pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $\lim_{k\to\infty} (x_k)_i = y_i$.

13.2. **Topologické pojmy v metrických prostorech.**

Definice. Nechť $A \subset P$. Řekneme, že množina A je **uzavřená** v P, jestliže platí následující implikace:

$$\{x_n\} \subset A, \quad x_n \xrightarrow{\varrho} x, \; x \in P \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Příklad. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že $(a, b]$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Potom $H(\{x_n\}) = \{x\}$, a tudíž platí $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{a_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \to a$. Protože $a \notin (a, b]$,plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina.

Věta 13.4 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

(a) *Množiny $\emptyset$ a P jsou uzavřené v P.*

(b) *Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin v P. Potom je $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená množina v P.*

(c) *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené množiny v P. Potom je $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená množina v P.*

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Nechť $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Protože sjednocení $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je konečné, existuje index $j \in \{1, \dots, m\}$ takový, že v množině F_j leží nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{x_n\}$. To znamená, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, která je celá obsažena v množině F_j. Tedy platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. $\square$

Poznámka. Pro nekonečný soubor uzavřených množin tvrzení Věty 13.4(c) neplatí. Příkladem je systém $\mathcal{F} = \{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem množiny** A, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset A$. Řekneme, že množina A je **otevřená** v P, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme jejím **vnitřkem** a značíme $\operatorname{Int} A$.

Věta 13.5 (otevřenost otevřené koule)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.*

Důkaz. Zvolme $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0, x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x, r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0, y) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0, r_0)$. Protože y bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Tudíž každý bod množiny $B(x_0, r_0)$ je jejím vnitřním bodem, a tedy $B(x_0, r_0)$ je otevřená množina. $\square$

Věta 13.6 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $F \subset P$. Potom F je uzavřená právě tehdy, když $P \setminus F$ je otevřená.*

konec 21. přednášky (30.04.2019)

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$ a $x \in P$ je takové, že $x_n \to x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x, r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \to x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. $\square$

Věta 13.7 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

(a) *Množiny $\emptyset$ a P jsou otevřené v P.*

(b) *Nechť $\mathcal{G}$ je neprázdný systém otevřených množin v P. Potom je $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená množina v P.*

(c) *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené množiny v P. Potom je $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená množina v P.*

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Potom existuje množina $G \in \bigcup \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\bigl\{r_i; i \in \{1, \dots, m\}\bigr\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. $\square$

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\operatorname{Int} M$ je otevřená množina. To plyne z toho, že buď $\operatorname{Int} M = \emptyset$, což je otevřená množina podle Věty 13.7(a), nebo

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x, r),\ x \in P,\ r > 0,\ B(x, r) \subset M\},$$

což je otevřená množina podle Vět 13.5 a 13.7(b).

Věta 13.8 (otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru)**.** *Každá podmnožina diskrétního prostoru je v tomto prostoru zároveň otevřená i uzavřená.*

Důkaz. Nechť P je množina a $M \subset P$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M a $x \in P$ je takové, že $x_n \to x$ v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$. Potom existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ taková, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud plyne, že $y \in M$. Z Věty 13.2(a) plyne, že $x_n \to y$, a tedy z Věty 13.2(b) vyplývá, že $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená. Ze stejného příkladu ale vyplývá, že také množina $P \setminus M$ je uzavřená. Podle Věty 13.6 je tedy množina M otevřená. $\square$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny** M a značíme ji $H(M)$. Označme $\overline{M} = M \cup H(M)$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v P.

Věta 13.9 (vlastnosti hranice)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom platí*

(a) $H(M) = H(P \setminus M)$,
(b) $H(P) = H(\emptyset) = \emptyset$.

Důkaz. (a) Tvrzení zřejmě plyne přímo z definice.

(b) Nechť $x \in P$. Potom pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap \emptyset = \emptyset$, a tedy $x \notin H(\emptyset)$. To znamená, že $H(\emptyset) = \emptyset$. Odtud a z tvrzení (a) potom plyne, že $H(P) = \emptyset$. $\square$

Příklady. (a) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(b) Dokažte, že $(0,1]$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int}(0,1] = (0,1)$ a $\overline{(0,1]} = [0,1]$.

Poznámka. Množina $[0,1)$ sice není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$, je však zároveň otevřená i uzavřená v metrickém prostoru $[0,1)$ se zděděnou metrikou.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. **Vzdáleností** bodu x od množiny A nazýváme nezáporný prvek $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x,y); y \in A\}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. **Průměrem** množiny A nazýváme nezáporný prvek

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, \text{ je-li } A = \emptyset, \\ \sup\{\varrho(x,y); x, y \in A\}, \text{ je-li } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Řekneme, že množina A je **omezená v** P, jestliže platí $\operatorname{diam} A < \infty$.

Poznámky. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$.

(a) Je-li $\operatorname{dist}(x, A) > 0$, potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \cap A = \emptyset$.
(b) Jestliže pro nějaké $r > 0$ platí $B(x,r) \cap A = \emptyset$, potom $\operatorname{dist}(x, A) \geq r$.

konec 22. přednášky (02.05.2019)

Věta 13.10 (charakterisace uzavřenosti)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $H(A) \subset A$.*

Důsledek. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $A = \overline{A}$.*

Věta 13.11 (vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$.*

(a) *Platí $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$.*
(b) *Jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
(c) *Množina $\overline{A}$ je uzavřená. Speciálně platí $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

(d) *Platí* $\overline{A} = \{x \in P; \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.
(e) *Platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(f) *Platí* $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.
(g) *Platí*

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subset P; F \text{ je uzavřená množina, } A \subset F\}.$$

13.3. **Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory.**

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$ a $a \in P$. Řekneme, že f je **spojité v bodě** a, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x, \delta)\colon f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

Řekneme, že f je **spojité**, jestliže je spojité v každém bodě prostoru P.

Poznámka. Spojitost zobrazení f v bodě a lze též zapsat ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P,\ \varrho(x, a) < \delta\ : \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

Věta 13.12 (Heineova věta pro metrické prostory)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$. Potom f je spojité právě tehdy, když platí implikace*

$$x_n \overset{\varrho}{\to} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \overset{\sigma}{\to} f(a),$$

kde $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P.

Věta 13.13 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*
(i) *zobrazení f je spojité,*
(ii) *pro každou uzavřenou množinu F v Q je $f^{-1}(F)$ uzavřená množina v P,*
(iii) *pro každou otevřenou množinu G v Q je $f^{-1}(G)$ otevřená množina v P.*

konec 23. přednášky (07.05.2019)

Příklad. Dokažte, že libovolné zobrazení na diskrétním prostoru je spojité.

Věta 13.14 (spojitosti složeného zobrazení)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) a (R, τ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$ je spojité a $g\colon Q \to R$ je spojité. Potom je zobrazení $g \circ f$ spojité.*

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$. Řekneme, že f je **homeomorfismus**, jestliže f je bijekce, f je spojité a f^{-1} je spojité. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus $f\colon P \to Q$.

Příklad. Dokažte, že prostory $\mathbb{R}$ a $(0, 1)$ jsou homeomorfní.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem** A, jestliže pro každé $r > 0$ platí $A \cap (B(a, r) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Množinu všech hromadných bodů množiny A nazýváme **derivací** A a značíme ji symbolem A'. Řekneme, že a je **isolovaným bodem množiny** A, jestliže $a \in A \setminus A'$.

Příklad. Dokažte, že každý bod diskrétního prostoru je isolovaný. Jinými slovy, pro každou množinu A v diskrétním prostoru platí $A' = \emptyset$.

Příklad. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ a $A = (a, b) \cup \{c\}$. Dokažte, že $A' = [a, b]$.

Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel definovaná předpisem

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Určete A'.

Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé,} \\ 1 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché} \end{cases}$$

a $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Určete A'.

Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a nechť $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $A' = H(\{a_n\})$.

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$, $a \in P$ a $A \subset P$. Řekneme, že f je **spojité v bodě** a **vzhledem k** A, jestliže $a \in A$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A\colon f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

Řekneme, že f je f **je spojité na** A, jestliže je spojité v každém bodě A vzhledem k A.

Definice. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$, $a \in A'$, $b \in Q$ a $f\colon A \to Q$. Řekneme, že f **má v** a **limitu** b **vzhledem k** A, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \setminus \{a\}\colon \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme že f **má v bodě** a **limitu** b.

Poznámka. Limita je jednoznačně definovaná.

Značení. Limitu f v a vzhledem k A značíme $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$, případně $\lim_{x \to a} f(x)$ (je-li $A = P$).

Příklad. Nechť $P = Q = \mathbb{R}$, D je Dirichletova funkce a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{x \to a,\, x \in \mathbb{Q}} D(x) = 1.$$

Poznámka. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$, $f\colon P \to Q$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom zobrazení f je spojité v a vzhledem k množině A právě tehdy, když $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) = f(a)$.

Věta 13.15 (limita složeného zobrazení)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ), (R, τ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$, $g\colon Q \to R$, $A \subset P$, $a \in A'$, $B \subset Q$, $b \in B'$, $c \in R$ a platí*

- *existuje $\delta > 0$, takové, že $f(A \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\})) \subset B$;*
- $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) = b$;
- $\lim_{y \to b,\, y \in B} g(y) = c$.

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) *existuje $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$;*
(S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B.*

Potom platí

$$\lim_{x \to a,\, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

14. Funkce více proměnných

14.1. Parciální derivace a totální diferenciál.

Poznámka. Množina $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i-tou souřadnici značíme x_i, a můžeme tedy psát $x = [x_1, \dots, x_n]$. Množina $\mathbb{R}^n$ obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej o. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $e^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$e^i = [0, \dots, 0, \underset{\substack{i\text{-tá sou-}\\ \text{-řadnice}}}{1}, 0, \dots, 0].$$

Prvky $\mathbb{R}^n$ můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem. Je-li $x \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\begin{aligned} x + y &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \\ \lambda \cdot x &= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]. \end{aligned}$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a $\cdot$ jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množina $B = \{e^i; i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů z množiny B. Zde konkrétně máme $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$.

O množině $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru $\mathbb{R}^n$ a o prvcích z $\mathbb{R}^n$ jako o bodech tohoto prostoru. Někdy je ovšem užitečné pohlížet na daný prvek x z $\mathbb{R}^n$ jako na *vektor*, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě x.

Použijeme-li v dalším textu symbol $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m$ a podobně, budou n, m, k vždy přirozená čísla.

Poznámka. Na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme eukleidovskou normu

$$\|x\| = \big\|[x_1, \dots, x_n]\big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Na $\mathbb{R}^n$ je definován skalární součin předpisem

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^n.$$

Potom platí

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Navíc Cauchyova nerovnost říká, že

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \colon \ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Poznámka. Řekneme, že zobrazení $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

(a) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \colon L(u + v) = L(u) + L(v)$,
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}^n \colon L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ budeme značit symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(x) = \mathbb{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Jestliže $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ a $a \in \mathbb{R}^n$, pak f je spojitá v a právě tehdy, když f_i jsou spojité v a pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$.

konec 24. přednášky (09.05.2019)

Poznámka. Jestliže $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení, pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ taková, že $L(h) = \sum_{i=1}^n A_i h_i$ pro každé $h \in \mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \le i \le n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t},$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě** a, jestliže platí

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{||h||} = 0.$$

Věta 14.1 (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací)**.** *Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Potom existují parciální derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ taková, že pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = L(h_1, \dots, h_n) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi\colon t \mapsto te^i$ je spojité a $\varphi(t) \neq o$ pro $t \neq 0$. Tedy podle věty o limitě složeného zobrazení platí

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + \varphi(t)) - f(a) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a) - A_i t}{|t|}.$$

Odtud

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} - A_i \right| = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i) - f(a)}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Poznámka. Z Věty 14.1 vyplývá, že totální diferenciál je jednoznačně určen (pokud existuje). Budeme jej značit symbolem $f'(a)$. Tedy $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení.

Poznámka. Existence vlastních parciálních derivací v bodě nezaručuje spojitost funkce v tomto bodě. Protipříkladem je funkce

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0,$$

ale funkce zřejmě není spojitá v bodě $[0,0]$.

Věta 14.2 (vztah totálního diferenciálu a spojitosti)**.** *Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $x \mapsto \|x-a\|$ a $h \mapsto f'(a)(h)$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \Big(& \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{\|x-a\|} \cdot \|x-a\| \\ & + f(a) + f'(a)(x-a) \Big) \\ = 0 \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v a. $\square$

Poznámka. Z Věty 14.2 a jí předcházející poznámky plyne, že funkce

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nemá v bodě $[0,0]$ totální diferenciál.

Věta 14.3 (o cestičce v kostičce)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\xi^1, \dots, \xi^n \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} p^0 &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = a, \\ p^1 &= (b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ p^2 &= (b_1, b_2, a_3 \dots, a_{n-1}, a_n), \\ &\vdots \\ p^{n-1} &= (b_1, b_2, b_3 \dots, b_{n-1}, a_n), \\ p^n &= (b_1, b_2, b_3 \dots, b_{n-1}, b_n) = b. \end{aligned}$$

Potom platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(p^i) - f(p^{i-1})\bigr). \tag{1}$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, a_n). \tag{2}$$

Pokud $a_i \neq b_i$, existuje podle Lagrangeovy věty bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

$$f(p^i) - f(p^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(z_i) \cdot (b_i - a_i) \tag{3}$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (3) platí i v tomto případě. Položme

$$\xi^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (2) a (3) platí $f(p^i) - f(p^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (1) dostáváme dokazovaný vztah. $\square$

Věta 14.4 (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Potom má f v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě a.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \forall x \in B(a, \tilde{\delta})\colon \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(a,\delta) \subset I \subset B(a,\tilde{\delta})$. Nechť $x \in B(a,\delta)$ je libovolné. Pak podle věty o cestičce v kostičce existují body $\xi^1,\ldots,\xi^n \in I$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) - L(x-a)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \Big)(x_i - a_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| |x_i - a_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \\ &\leq \varepsilon n \left\| x - a \right\|. \end{aligned}$$

Tedy pro $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$ máme

$$\frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{\|x - a\|} \leq n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. □

konec 25. přednášky (16.05.2019)

Definice. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce** f **v** a **podle** v rozumíme (vlastní) limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Poznámka. Platí $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i}(a)$, pokud má alespoň jedna strana smysl. Dále platí $D_o f(a) = 0$.

Definice. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Pak definujeme **gradient** f **v** a předpisem

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 14.5 (geometrický význam gradientu)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Nechť existuje $f'(a)$. Potom platí*
(a) $D_v f(a) = f'(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle$,
(b) $\max\{D_v f(a);\ ||v|| = 1\} = ||\nabla f(a)||$.

Poznámka. Pokud platí $\nabla f(a) \neq o$, potom se maxima v tvrzení (b) Věty 14.5 nabývá právě pro $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Definice. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární. Řekneme, že L je **derivací** f **v** a, jestliže

$$\lim_{h \to o} \frac{||f(a+h) - f(a) - L(h)||}{||h||} = 0.$$

Věta 14.6 (representace derivace)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$. Nechť f má v a derivaci L. Potom je L representováno maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Z Věty 14.6 vyplývá, že derivace zobrazení f v bodě a je určena jednoznačně (pokud existuje). Značíme ji $f'(a)$.

Definice. Matice representující $f'(a)$ se nazývá **Jacobiho matice**. Jestliže $m = n$, potom determinant Jacobiho matice nazýváme **jakobián** a značíme jej $J_f(a)$ nebo $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$.

Poznámka. $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují totální diferenciály $f_1'(a), \dots, f_m'(a)$.

Věta 14.7 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Potom f je spojité v a.*

Věta 14.8 (postačující podmínka pro existenci derivace)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, jsou spojité v a. Potom $f'(a)$ existuje.*

Věta 14.9 (spojitost lineárního zobrazení)**.** *Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $||L(x)|| \le C||x||$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.*

konec 26. přednášky (21.05.2019)

Definice. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom **normou** L rozumíme číslo

$$||L|| = \sup\left\{\frac{||L(x)||}{||x||};\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq o\right\}.$$

Poznámka. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$. Potom $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor.

Lemma. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Potom existují $C \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, taková, že pro každé $h \in B(o, \delta)$ platí $||f(a + h) - f(a)|| \le C||h||$.*

Věta 14.10 (derivace složeného zobrazení)**.** *Nechť $m, n, s \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b = f(a)$ a existují $f'(a)$ a $g'(b)$. Potom existuje $(g \circ f)'(a)$ a platí $(g \circ f)'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.*

Poznámka. Derivace $(g \circ f)'(a)$ je representována součinem matic, které representují $g'(f(a))$ a $f'(a)$.

Poznámka. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární. Potom platí $L'(a) = L$.

Věta 14.11 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b = f(a)$, existují $f'(a)$ a $g'(b)$ a $h = g \circ f$. Potom existuje $h'(a)$ a platí*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Příklad. Na hromadu písku tvaru kužele je plynule přisypáván další písek. Výška h roste rychlostí

$$\frac{dh}{dt} = 3 \text{ [cm / sec]}$$

a poloměr podstavy r roste rychlostí

$$\frac{dr}{dt} = 2 \text{ [cm / sec]}.$$

Spočtěte rychlost, s jakou narůstá objem hromady v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

Věta 14.12 (o přírůstku funkce)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f\colon R^n \to \mathbb{R}$, pro každé $x \in G$ existuje $f'(x)$, $a, b \in G$ a úsečka J spojující body a, b je obsažena v G, tj. $J = \{(1-t)a + tb;\ t \in [0,1]\} \subset G$. Potom existuje $\xi \in J$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže

$$\exists K > 0\ \forall x, y \in P\colon \sigma(f(x), f(y)) \leq K \varrho(x, y).$$

Definice. Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé její dva body platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v G.

Věta 14.13 (vztah omezené derivace a lipschitzovskosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina v $\mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ má derivaci v každém bodě G a*

$$\sup\{\|f'(x)\|;\ x \in G\} \leq K$$

pro nějaké $K > 0$. Pak f je lipschitzovská s konstantou K, tedy

$$\forall a, b \in G:\ \ \|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\|.$$

konec 27. přednášky (23.05.2019)