

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, NMMA102, LETNÍ SEMESTR 2018–2019

POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

POPIS PŘEDMĚTU

Jde o druhou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy. Věnuje se pokročilejším partiím diferenciálního počtu, základům integrálního počtu a základům teorie metrických prostorů. Kurs se skládá z přednášek, cvičení a prosemináře a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15–25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tematiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15–25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři často referují probíranou látku studenti. Proseminář je hodnocen zápočtem. Zápočet bývá typicky udělován za inteligentní referát.

ZÁPOČET

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni druhého semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek je možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). Tato možnost je chápána jako zcela výjimečné opravné opatření a týká se pouze studentů, kteří vyčerpají všechny tři možnosti napsání písemky. Je nutná individuální domluva s cvičícím.

ZKOUŠKA

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bylo vypsáno právě pět termínů, a to

- ve středu 05.06.2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- v pondělí 10.06.2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 19.06.2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 26.06.2019 v 08:00 v posluchárně K1,
- ve středu 11.09.2019 v 08:00 v posluchárně K1.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

V posluchárnách, v nichž se písemná část zkoušky bude konat, bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili včas a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (index, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude složena z pěti příkladů. Půjde o následující příklady:

- úloha na Taylorův polynom (10 bodů),
- určení středu a poloměru mocninné řady a nalezení bodů, v nichž řada konverguje či absolutně konverguje (10 bodů),
- výpočet primitivní funkce (10 bodů),
- vyšetření konvergence určitého integrálu (10 bodů),
- úloha na funkce více proměnných (10 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou zkoušku neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita oficiální elektronická adresa, která je uvedena v systému SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou **neprospěl(a)**, bude do systému SIS zapsána známka 4. Tito studenti budou mít možnost se s hodnocením své písemné práce seznámit, pokud o to projeví zájem.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat

- ve čtvrtek 06.06. 2019 v 08:00 v posluchárně K2,
- v úterý 11.06. 2019 v 08:00 v posluchárně K2,
- ve čtvrtek 20.06. 2019 v 08:00 v posluchárně K2,
- ve čtvrtek 27.06. 2019 v 08:00 v posluchárně K2,
- ve čtvrtek 12.09. 2019 v 08:00 v posluchárně K2.

Ústní část zkoušky bude obsahovat sedm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 bodů),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou **neprospěl(a)**, je student povinen znovu složit obě části zkoušky (písemnou i ústní).

CELKOVÉ HODNOCENÍ ZKOUŠKY

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka “výborně” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 82–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery

v obtížnějších partiích. Orientačně známka “velmi dobře” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–81.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka “dobře” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení “neprospěl(a)” odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

VZOROVÉ ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY

Příklad 1. Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \arcsin(bx) + x^3}{x^5}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte. (10 bodů)

Příklad 2. Nalezněte střed a poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně. (10 bodů)

Příklad 3. Spočítejte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x} dx$$

na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. (10 bodů)

Příklad 4. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x + 2 \sin(x-1)}{x^{\frac{4}{5}} \sqrt{x+1}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 5. Nechť $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = (|xy| + \sin xy, \arctg(x + y + 2z)).$$

- Dokažte, že v bodě $(1, 1, -1)$ existuje derivace funkce F a spočítejte její reprezentující matici.
- Spočítejte $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0, 0, 0)$, pokud existuje. (10 bodů)

VZOR ZADÁNÍ ÚSTNÍ ČÁSTI ZKOUŠKY

Sada číslo π

- Otázka 1.** *Napište definici klíčového pojmu:* Taylorův polynom.
- Otázka 2.** *Napište definici pojmu:* stejnoměrně spojitá funkce.
- Otázka 3.** *Napište znění věty:* první věta o střední hodnotě (Věta 11.10).
- Otázka 4.** *Napište znění věty:* o poloměru konvergence mocninné řady (Věta 7.1).
- Otázka 5.** *Zformulujte a dokažte větu:* vlastnosti uzávěru (Věta 13.11).
- Otázka 6.** *Zformulujte a dokažte větu:* aproximace Riemannova integrálu (Věta 9.4).
- Otázka 7.** *Zformulujte a dokažte větu:* postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (Věta 14.4).

SEZNAMY POŽADOVANÝCH VĚT, DEFINIC A KLÍČOVÝCH POJMŮ

Seznam klíčových pojmů.

- Taylorův polynom, Taylorova řada
- mocninná řada, střed a poloměr konvergence
- primitivní funkce
- Riemannův integrál
- stejnoměrně spojitá funkce
- Newtonův integrál
- konvergentní a divergentní Newtonův integrál
- metrický prostor, metrika
- normovaný lineární prostor, norma
- otevřená a uzavřená množina, vnitřek a uzávěr množiny
- konvergence a limita posloupnosti v metrickém prostoru
- derivace podle vektoru, parciální derivace, gradient, totální diferenciál, derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- norma lineárního zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Seznam požadovaných definic.

- symbol o
- dělení intervalu, zjemnění dělení
- horní a dolní součty, horní a dolní Riemannův integrál
- metriky v $\mathbb{R}^n$, metriky v $C[a, b]$, diskrétní metrika
- otevřená koule v metrickém prostoru, vnitřní bod, vnitřek
- hraniční bod, hranice množiny
- vzdálenost bodu od množiny, průměr množiny
- hromadný bod, derivace množiny, izolovaný bod
- konvexní množina
- lipschitzovské zobrazení

Seznam požadovaných vět (není-li výslovně stanoveno jinak, jsou požadovány úplné důkazy).*Taylorův polynom.*

- Peanův tvar zbytku (Věta 6.1)
- lemma o příliš dobré aproximaci polynomu
- jednoznačnost Taylorova polynomu (Věta 6.2)
- obecný tvar zbytku (Věta 6.3)
- Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.4)
- Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.5)
- aritmetika malého o (Věta 6.6 - bez důkazu)
- malé o složené funkce (Věta 6.7 - bez důkazu)
- Taylorovy řady elementárních funkcí (Věta 6.8 - bez důkazu)

Mocninné řady.

- o poloměru konvergence mocninné řady (Věta 7.1)
- derivace mocninné řady (Věta 7.2)
- vztah mocninné řady a Taylorova polynomu (Věta 7.3)
- Abelova věta (Věta 7.4)

Primitivní funkce.

- jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu (Věta 8.1)
- vztah spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 8.2)
- Darbouxova vlastnost derivace (Věta 8.3)
- linearita primitivní funkce (Věta 8.4)
- první věta o substituci (Věta 8.5)

- druhá věta o substituci (Věta 8.6)
- integrace per partes (Věta 8.7)
- věta o lepení (Věta 8.9)

Riemannův integrál.

- vlastnosti dělení (Věta 9.1)
- mantinely Riemannova integrálu (Věta 9.2)
- aproximace horního a dolního Riemannova integrálu (Věta 9.3 - bez důkazu)
- aproximace Riemannova integrálu (Věta 9.4)
- kritérium existence Riemannova integrálu (Věta 9.5)
- vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti (Věta 9.6)
- vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7)
- vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.8)
- vlastnosti Riemannova integrálu (Věta 9.9)
- derivace funkce horní meze Riemannova integrálu (Věta 9.10)
- výpočet Riemannova integrálu spojitě funkce (Věta 9.11)
- charakterizace riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.12 - bez důkazu)

Newtonův integrál.

- vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu (Věta 10.1)
- vlastnosti Newtonova integrálu (Věta 10.2)
- per partes pro Newtonův integrál (Věta 10.3)
- substituce pro Newtonův integrál (Věta 10.4)
- vztah Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 10.5)

Konvergence Newtonova integrálu.

- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro funkce (Věta 11.1)
- postačující podmínka pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 11.2)
- srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 11.3)
- limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu - bez důkazu (Věta 11.6)
- Newtonův integrál součinu funkcí (Věta 11.7 - bez důkazu)
- Abelovo–Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu (Věta 11.8)
- o nulové funkci (Věta 11.9)
- první věta o střední hodnotě (Věta 11.10)
- druhá věta o střední hodnotě (Věta 11.11)

Aplikace určitého integrálu.

- Cauchyova nerovnost (Věta 12.1)
- eukleidovský prostor (Věta 12.2)
- odhad normy integrálu (Věta 12.3)
- délka křivky (Věta 12.4)
- integrální kritérium konvergence řad (Věta 12.5)
- integrální tvar zbytku (Věta 12.6)

Metrické prostory.

- vztah mezi normou a metrikou (Věta 13.1)
- vlastnosti konvergence v metrickém prostoru (Věta 13.2)
- limita vybrané posloupnosti (Věta 13.3)
- vlastnosti uzavřených množin (Věta 13.4)
- otevřenost otevřené koule (Věta 13.5)
- vztah otevřených a uzavřených množin (Věta 13.6)
- vlastnosti otevřených množin (Věta 13.7)
- otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru (Věta 13.8)
- vlastnosti hranice (Věta 13.9)
- charakterizace uzavřenosti (Věta 13.10)

- vlastnosti uzávěru (Věta 13.11)
- Heineova věta pro metrické prostory (Věta 13.12)
- charakterizace spojitosti (Věta 13.13)
- spojitost složeného zobrazení (Věta 13.14)
- limita složeného zobrazení - bez důkazu (Věta 13.15 - bez důkazu)

Funkce více proměnných.

- vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací (Věta 14.1)
- vztah totálního diferenciálu a spojitosti (Věta 14.2)
- o cestičce v kostičce (Věta 14.3)
- postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu (Věta 14.4)
- geometrický význam gradientu (Věta 14.5)
- reprezentace derivace maticí (Věta 14.6)
- vztah derivace a spojitosti vektorové funkce více proměnných (Věta 14.7)
- postačující podmínka pro existenci derivace vektorové funkce více proměnných (Věta 14.8)
- spojitost lineárního zobrazení (Věta 14.9)
- derivace složeného zobrazení (Věta 14.10)
- řetězkové pravidlo (Věta 14.11)
- o přírůstku funkce (Věta 14.12)