MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2018–2019
POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Taylorův polynom

Příklad 1.1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^4 včetně. Spočtěte $f^{(4)}(0)$.

Příklad 1.2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^{13} včetně.

Příklad 1.3. Rozložte funkci $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ pro $x > 0$ do řady mocnin $\frac{1}{x}$ až do řádu $\frac{1}{x^3}$ včetně.

Příklad 1.4. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in [0,1]$$
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad x \in [0,1].$$

Příklad 1.5. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin a odhadněte chybu:

$$\sqrt{e}, \qquad \arcsin 0,45, \qquad \log(1,2), \qquad (1,1)^{1,2}.$$

Příklad 1.6. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin s danou přesností:

e s přesností na 10^{-9}, $\sqrt{5}$ s přesností na 10^{-4}, $\log_{10}(11)$ s přesností na 10^{-5}.

Příklad 1.7. S pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x,\right)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3},$$
$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right].$$

Příklad 1.8. S pomocí Taylorova polynomu vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right].$$

Příklad 1.9. Vyšetřete konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \log(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Výsledky.

- Příklad 1.1: $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad -48.$
- Příklad 1.2: $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13}).$
- Příklad 1.3: $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$
- Příklad 1.4: $\frac{3}{(n+1)!}, \quad \frac{1}{3840}, \quad \frac{1}{16}.$
- Příklad 1.5:

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &\approx 1,64872, & |\sqrt{e} - 1,64872| &\le 2\cdot 10^{-6},\\ \arcsin 0,45 &\approx 0,46676, & |\arcsin 0,45 - 0,46676| &\le 6\cdot 10^{-6},\\ \log(1,2) &\approx 0,182321, & |\log(1,2) - 0,182321| &\le 6\cdot 10^{-7},\\ (1,1)^{1,2} &\approx 1,12117, & |(1,1)^{1,2} - 1,12117| &\le 5\cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

- Příklad 1.6: $2,718281828, \quad 2,2361, \quad 1,04139.$
- Příklad 1.7: $-\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}.$
- Příklad 1.8: konverguje, diverguje.
- Příklad 1.9: diverguje, konverguje.

2. Mocninné řady

Příklad 2.1. Následující funkce vyjádřete jako součet mocninné řady o středu 0 na maximálním otevřeném intervalu.

$$e^{-x^2}, \quad \cos^2 x, \quad ,\sin^3 x, \quad \frac{x^{10}}{1-x}, \quad \frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}, \quad \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \frac{x}{1+x-2x^2}, \quad \frac{1}{x^2+x+1}, \quad \log(1+x+x^2+x^3).$$

Příklad 2.2. Na intervalu konvergence sečtěte mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 1(-1)^k k^2 x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k, \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$

Příklad 2.3. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}.$$

Příklad 2.4. Užitím Abelovy věty sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

Příklad 2.5. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{(n+1)2^n}.$$

Příklad 2.6. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$$

na jejím definičním oboru. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 2.7. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1)}{3^n n!} x^n$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.8. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(2n-1)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.9. Nalezněte definiční obor funkce f, zadané předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \right)^n x^n.$$

Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 2.10. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(2n)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.11. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!2^n}.$$

Příklad 2.12. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}.$$

Příklad 2.13. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \quad a > 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad \text{(těžké)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n.$$

Výsledky.

- Příklad 2.12: (i) $R = \frac{1}{3}$, AK pro $-\frac{4}{3} \le x < -\frac{2}{3}$, K pro $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$;
  (ii) $R = 4$, AK i K pro $-4 < x < 4$;
  (iii) $R = \frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$;
  (iv) $R = \frac{1}{e}$, AK pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$, K pro $-\frac{1}{e} \le x < \frac{1}{e}$.
- Příklad 2.13: (i) $R = 1$, pro $-1 < x < 1$ AK pro všechna $a > 0$, pro $x = \pm 1$ AK i K pro $a \in (1, \infty)$;
  (ii) $R = 1$, AK pro $-1 < x < 1$ K pro $-1 \le x < 1$;
  (iii) $R = 1$, AK i K pro $-1 < x < 1$;
  (iv) $R = 1$, AK pro $-1 < x < 1$ K pro $-1 < x \le 1$;
  (v) $R = \frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$.

3. Primitivní funkce

Příklad 3.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3\,dx, \qquad \int \sin(2x+7)\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Příklad 3.2. Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Příklad 3.3. Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$$

Příklad 3.4. Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x\sin x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \log x\,dx;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx.$$

Příklad 3.5. Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \sin(\log x)\,dx.$$

Příklad 3.6. Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}};$$

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx.$$

Příklad 3.7. Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x|\,dx, \qquad \int e^{-|x|}\,dx, \qquad \int \max\{x,x^2\}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \qquad \int |2x+1|\,dx; \qquad \int \left(|1+x|-|1-x|\right)\,dx.$$

Příklad 3.8. Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4};$$

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Příklad 3.9. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2-2x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Příklad 3.10. Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 3.11. Na intervalu $(-\pi,\pi)$ nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(\sin x)|\sin x|+(\cos x)^2}{(\sin x)^2+2(\cos x)^2}\,dx.$$

Příklad 3.12. Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k funkci

$$f(x) = \frac{1}{6\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

Příklad 3.13. Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu k funkci

$$f(y) = \frac{1}{3\cos^2 y + \sin(2y) + 1}.$$

Příklad 3.14. Spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, na kterých existuje, k funkci

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1}\, dx.$$

Výsledky.

- Příklad 3.11: Označme

$$I := \int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\, dx.$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, a to na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, pak po řadě vychází $t \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$ a $t \in (-\infty, 0)$. Tedy

$$I = \begin{cases} \int \frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\, dt, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \int \frac{dt}{2+t^2} & x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Rozložíme první funkci na parciální zlomky a druhou spočítáme rovnou. U první funkce dostaneme rozklad

$$\frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2},$$

uhodneme $A = C = 0$ a dopočítáme $B = 2$, $D = -3$. Celkem dostaneme

$$I = \begin{cases} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_2, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_3, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_4, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Nyní spočítáme jednu primitivní funkci na celém intervalu $(-\pi, \pi)$, řekněmě F_0. Nejprve zvolíme konstantu $C_2 = 0$ Konstanty C_1, C_3 a C_4 spočítáme z jednostranných limit funkce F_0 v bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0. Dostáváme

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

V bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0 dodefinujeme funkci F_0 tak, aby byla spojitá. Celkem tedy máme

$$F_0(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} - \pi, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Všechny primitivní funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Příklad 3.12: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(x)+C$, $x\in(0,\pi)$, kde (například)
$$F_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,(3\operatorname{cotg} x+1)\right)$$
nebo
$$F_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg}x+2)\right), & x\in(0,\frac{\pi}{2});\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg}x+2)\right)+\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x\in(0,\frac{\pi}{2});\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$
- Příklad 3.13: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(y)+C$, $y\in(-\infty,\infty)$, kde (například)
$$F_0(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}y+1}{\sqrt{3}}+\frac{k\pi}{\sqrt{3}}\right), & y\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi);\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+k\right), & y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
- Příklad 3.14:
$$\log|e^x-1|-\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+e^x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\right),\qquad x\in(-\infty,0)\quad\text{nebo}\quad x\in(0,\infty).$$

4. Určitý integrál

Příklad 4.1. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

Příklad 4.2. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}.$$

Příklad 4.3. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Příklad 4.4. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_2^{\infty}\frac{\sqrt{y}-1}{(y+2)(\sqrt{y}+1)\sqrt{y}}\,dy.$$

Příklad 4.5. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t+3\sin t+1}}dt.$$

Příklad 4.6. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x+2}{(\cos(2x)+\sin^2 x)(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x+3)}\,dx.$$

Příklad 4.7. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{16}^{\infty}\frac{2y^{\frac{3}{2}}-5y+8\sqrt{y}-1}{\left(y-2\sqrt{y}-3\right)\sqrt{y}\left(y-\sqrt{y}+2\right)}\,dy$$

Výsledky.

- Příklad 4.1: Označme
$$I:=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

Použijeme substituci $y = e^x$, pak $y \in (0,1)$. Protože $dy = e^x\,dx$, máme
$$I = \int_0^1 \frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)}\,dy.$$
Rozložíme integrand na parciální zlomky:
$$\frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{2y+1} + \frac{D}{y+1}$$
Použitím cover-up rule, tj. dosazením $y = -\frac{1}{2}$ a $y = -1$ dostaneme ihned $C = D = -1$, pak dosazením například $y = 0$ vypočítáme $B = 0$ a konečně dosazením například $y = 1$ dostaneme $A = 2$. Celkem
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \left[\log(y^2+1) - \frac{1}{2}\log(2y+1) - \log(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{2}\log 3. \end{aligned}$$

- Příklad 4.2:
$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right)$$
- Příklad 4.4:
$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 2\log\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$
- Příklad 4.5:
$$\sqrt{5} - 2 + 3\log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-2\sqrt{5}} - 1\right)$$
- Příklad 4.6:
$$\frac{1}{4}\log\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
- Příklad 4.7: ∞ (integrál existuje, ale nekonverguje)

5. Konvergence Newtonova integrálu

Příklad 5.1. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx; \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx; \quad \int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^p}\,dx; \quad \int_0^1 x^{ax}\,dx;$$
$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Příklad 5.2. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:
$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,dx.$$

Příklad 5.3. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\,dx.$$

Příklad 5.4. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^\alpha x \, dx.$$

Příklad 5.5. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Příklad 5.6. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))} \, dx.$$

Příklad 5.7. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty x \cos(x^4) \, dx.$$

Příklad 5.8. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha} \, dx.$$

Příklad 5.9. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) x^\alpha \, dx.$$

Výsledky.

- Příklad 5.1:
  konverguje; $p, q > 0$; $p > -1$;
  konverguje; $a \in (-1, 1)$; $0 < p + 1 < q$;
  $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < 3$; $a \in \mathbb{R}$;
  $a \in (-1, -\frac{1}{2})$; $p > -\frac{1}{2}$.
- Příklad 5.2: $\alpha > 1$; $q < \frac{3}{2}$.
- Příklad 5.3: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $\alpha < 1 < \beta$ nebo $\beta < 1 < \alpha$.
- Příklad 5.4: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $-3 < \alpha < 1$.
- Příklad 5.5: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 5.6: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 5.7: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 5.8: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 4)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (1, 4)$.
- Příklad 5.9: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, 0)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, -1)$.

6. Aplikace určitého integrálu

Příklad 6.1. Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Příklad 6.2. Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{a} \quad x - y - 1 = 0.$$

Příklad 6.3. Spočtěte obsah plochy vymezené grafem paraboly

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

a jejími tečnami vedenými z bodů $[0, -3]$ a $[3, 0]$.

Příklad 6.4. Spočtěte obsah plochy vymezené parabolami
$$y = x^2 \quad \text{a} \quad y = \sqrt{x}.$$

Příklad 6.5. Spočtěte délku křivky
$$y = a \cosh \frac{x}{a}, \quad x \in [0, b],\ a, b > 0.$$

Příklad 6.6. Spočtěte délku paraboly
$$y^2 = 2px$$
mezi počátkem a některým její bodem.

Příklad 6.7. Spočtěte délku křivky
$$y = \log x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}].$$

Příklad 6.8. Spočtěte délku křivky
$$y = \log(1 - x^2), \quad x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Příklad 6.9. Spočtěte délku grafu funkce
$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad x \in [0, 4]\ .$$

Příklad 6.10. Spočtěte objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 6.11. Spočtěte obsah jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 6.12. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4}, \qquad x \in [2, 4].$$

Příklad 6.13. Určete objem a povrch pláště tělesa, vzniklého rotací množiny
$$\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y - b)^2 \le a^2\right\}, \quad (0 < a \le b),$$
okolo osy x.

Příklad 6.14. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right), \qquad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Příklad 6.15. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \qquad x \in [2, 4].$$

Příklad 6.16. Spočtěte objem a povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $y = e^x$ kolem osy x, kde $x \in (-\infty, 0)$.

Příklad 6.17. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Příklad 6.18. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \cosh x, \qquad x \in [0, a]$$

Příklad 6.19. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti
$$M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 8 \le 6y\right\}$$
kolem osy x.

Příklad 6.20. Spočtěte objem toru, vzniklého rotací kruhu o poloměru $a > 0$ a středu v bodě $b > a$ kolem osy y.

Příklad 6.21. Spočtěte povrch pláště parabolické mísy, vzniklé rotací parabolického oblouku $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, kolem osy y.

Příklad 6.22. Spočtěte povrch pláště ragbyového míče, vzniklého rotací elipsy $x^2+4y^2=4$ kolem osy y.

Příklad 6.23. Vyšetřete konvergenci následujících číselných řad pomocí integrálního kritéria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\frac{n+1}{n-1}.$$

Příklad 6.24. *Těžiště* rovinné oblasti dané nerovnostmi $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ je bod $[\overline{x}, \overline{y}]$, kde

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_a^b (f(x))^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Najděte těžiště rovinných oblastí, daných následujícími nerovnostmi:

$$-a \le x \le a, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2};$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$x^2 + y^2 = r^2, \ x \ge 0, \ y \ge 0.$$

Příklad 6.25. Nechť f je spojitá na $[0,1]$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n), dx.$$

Výsledky.

- Příklad 6.1: $2\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}$
- Příklad 6.2: $\frac{16}{3}$
- Příklad 6.3: $\frac{9}{4}$
- Příklad 6.4: $\frac{1}{3}$
- Příklad 6.5: $a \sinh \frac{b}{a}$
- Příklad 6.6: $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$
- Příklad 6.7: $1 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$
- Příklad 6.8: $\log 3 - \frac{1}{2}$
- Příklad 6.9: $\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)$
- Příklad 6.10: $\frac{4\pi}{3}$
- Příklad 6.11: 4π
- Příklad 6.12: Označme L hledanou délku křivky. Podle příslušného vzorce je

  $$L = \int_2^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

  kde

  $$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4},$$

  takže

  $$f'(x) = x - \frac{1}{4x},$$

tj.

$$f'(x)^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\log x\right]_{x=2}^{x=4} \\ &= 6 + \frac{\log 2}{4}. \end{aligned}$$

- Příklad 6.13: $V = 2\pi^2 a^2 b$, $S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 6.15: $\frac{1}{2}\log\frac{e^4 - e^{-4} - 2}{e^2 - e^{-2} - 2}$
- Příklad 6.16: $\frac{\pi}{2}$
- Příklad 6.17: $6a$
- Příklad 6.18: $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$
- Příklad 6.19: $6\pi^2$
- Příklad 6.20: $V = 2\pi^2 a^2 b, \quad S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 6.21: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
- Příklad 6.22: $8\pi\left(1 + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)$
- Příklad 6.23: konverguje, diverguje, konverguje, konverguje
- Příklad 6.24: $\left[0, \frac{4a}{3\pi}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\pi}{8\log(1+\sqrt{2})},\right]$, $\left[\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right]$
- Příklad 6.25: $f(0)$.

7. Metrické prostory I

Příklad 7.1. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na $\mathbb{R}$:

$$\varrho(x,y) = |x^3 - y^3|; \qquad \varrho(x,y) = |x^2 - y^2|; \qquad \varrho(x,y) = (x-y)^2.$$

Příklad 7.2. Nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky na množině P. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na P:

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; 1\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; 2\}.$$

Příklad 7.3. Co je potřeba předpokládat o funkci φ, aby funkce $\varrho(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ definovala metriku na $\mathbb{R}$?

Příklad 7.4. Najděte okolí bodu $[1,1]$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ v ruské metrice o poloměrech 1 a 2 a v diskrétní metrice o poloměrech $\frac{1}{2}$ a 2.

Příklad 7.5. Rozhodněte, zda v obecném metrickém prostoru platí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Příklad 7.6. V metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou najděte uzávěry grafů funkcí

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0; \end{cases} \qquad D(x); \qquad R(x),$$

kde symboly D a R značíme Dirichletovu a Riemannovu funkci.

8. Funkce více proměnných

8.1. **Základní pojmy.**

Příklad 8.1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f(x,y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \qquad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - 2x;$$
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Příklad 8.2. Načrtněte graf funkce (jedné proměnné)

$$F(t) = f(\cos t, \sin t),$$

kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (y \ge x); \\ 0 & (y < x). \end{cases}$$

Příklad 8.3. Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + \sqrt{y-1}; \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$$
$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right); \quad f(x,y) = \log -x - y; \quad f(x,y) = \sqrt{\sin x^2 + y^2}.$$

Příklad 8.4. Určete a načrtněte vrstevnice následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + y; \quad f(x,y) = x^2 + y^2; \quad f(x,y) = x^2 - y^2;$$
$$f(x,y) = (x+y)^2; \quad f(x,y) = \frac{y}{x}; \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{xy}; \quad f(x,y) = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}; \quad f(x,y) = x^y \ (x > 0).$$

Příklad 8.5. Spočtěte $f(1, \frac{y}{x})$, jestliže $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Příklad 8.6. Určete $f(t)$, jestliže $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

Příklad 8.7. Nechť $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$ a $z = x$ pro $y = 1$. Určete funkce f a z.

Příklad 8.8. Nechť $z = x + y + f(x - y)$ a $z = x^2$ pro $y = 0$. Určete funkce f a z.

Příklad 8.9. Určete $f(x,y)$, jestliže $f(x + y, \frac{x}{y}) = x^2 - y^2$.

Výsledky. Příklad 8.1: trojúhelník, sféra, kužel, paraboloid.

Příklad 8.2:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & [-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi]; \\ 0 & (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Příklad 8.3: $(-\infty, \infty) \times [1, \infty)$; kruh $\left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$; doplněk téhož kruhu v $\mathbb{R}^2$; plocha ohraničená dvěma tupými úhly vymezenými přímkami $y = 0$ a $y = 2x$ bez počátku; polorovina $\{x + y < 0\}$; sjednocení mezikruží $\{2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k+1)\pi\}$.

Příklad 8.4: rovnoběžné přímky, soustředné kružnice, hyperboly se společnou asymptotou $y = \pm x$, rovnoběžné přímky, svazek paprsků vycházejících z počátku bez počátečního bodu; soustředné podobné elipsy, hyperboly ležící v kvadrantech I a III s asymptotami blížícími se k souřadným osám; křivky $y = \frac{C}{\log x}$.

Příklad 8.5: $f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y)$.

Příklad 8.6: $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

Příklad 8.7: $f(t) = 2t + t^2$, $z(x, y) = x - 1 + \sqrt{y}$.

Příklad 8.8: $f(t) = t^2 - t^2$, $z(x, y) = 2y + (x - y)^2$.

Příklad 8.9: $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$.

8.2. **Limita a spojitost.**

Poznámka. V této kapitole budeme vyšetřovat limity funkcí více proměnných. Tyto limity chápeme ve smyslu definice limity pro zobrazení mezi metrickými prostory. Výjimku tvoří limity v bodech, které mají jednu nebo více složek nevlastních (tj. v bodech typu $[a, \infty]$, $[\infty, b]$, $[\infty, \infty]$ a podobně). Tyto limity chápeme ve smyslu následující definice: řekneme, že $\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} f(x, y) = A \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x, y > K:\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Obdobně definujeme limity v bodech s více nevlastními složkami a také nevlastní limity (tj. případy $A = \pm\infty$).

Příklad 8.10. Nechť

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = -1,$$

a tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

neexistuje.

Příklad 8.11. Nechť

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}.$$

Dokažte, že sice

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0,$$

ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

neexistuje.

Příklad 8.12. Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right), & x \neq 0,\ y \neq 0; \\ 0, & x = 0 \text{ nebo } y = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že sice ani jedna z limit

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$$

neexistuje, ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

existuje. Čemu se tato limita rovná?

Příklad 8.13. Spočtěte

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{a} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

kde

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \qquad a=b=\infty;\\
f(x,y) &= \frac{x^y}{1+x^y}, \qquad a=\infty,\ b=0+;\\
f(x,y) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \qquad a=b=\infty;\\
f(x,y) &= \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right), \qquad a=0,\ b=\infty;\\
f(x,y) &= \log_x(x+y), \qquad a=1,\ b=0.
\end{aligned}$$

Příklad 8.14. Spočtěte následující limity ($a\in\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} &= \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};\\
\lim_{[x,y]\to[0,a]} &= \frac{\sin(xy)}{x};\\
\lim_{[x,y]\to[0,0]} &= (x^2+y^2)^{x^2y^2};\\
\lim_{[x,y]\to[\infty,a]} &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};\\
\lim_{[x,y]\to[1,0]} &= \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Příklad 8.15. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0),\end{cases}$$

je spojitá jako funkce proměnné x i proměnné y, ale není spojitá jako funkce dvou proměnných.

Příklad 8.16. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x^2+y^2\neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0),\end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$ po všech přímkách $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $t\in(0,\infty)$, $\alpha\in[0,2\pi]$, ale přesto není v bodě $[0,0]$ spojitá.

Příklad 8.17. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

spojitá na svém definičním oboru.

Příklad 8.18. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2-x^2y^3}{x^2+y^2}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Příklad 8.19. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

dodefinovat na přímce $y = x$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Příklad 8.20. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)\sin^3(y)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$$

dodefinovat v bodě $[0, 0]$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

Příklad 8.21. Najděte podmínky na konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$, aby existovala limita ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{[x,y]\to[0,\alpha]} = \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Výsledky. Příklad 8.12: 0

Příklad 8.13: $0, 1;\quad \frac{1}{2}, 1;\quad 0, 1;\quad 0, 1;\quad 1, \infty.$

Příklad 8.14: $0;\quad a;\quad 1;\quad e;\quad \log 2.$

Příklad 8.17: ano

Příklad 8.18: ano, $f(0, 0) = 1$.

Příklad 8.19: ano, $f(x, x) = 3x^2$.

8.3. **Derivace a totální diferenciál.**

Příklad 8.22. Dokažte, že pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a pro libovolné pevné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, a) = \frac{d}{dx} f(x, a)$$

Příklad 8.23. Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 1), \quad \text{jestliže} \quad f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Příklad 8.24. Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \text{jestliže} \quad f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Má funkce $f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál?

Příklad 8.25. Má funkce

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál?

Příklad 8.26. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & [x, y] \neq [0, 0]; \\ 0 & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál?

Příklad 8.27. Spočtěte
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
pro funkce
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2; \quad f(x,y) = xy + \frac{x}{y}; \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2};$$
$$f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}; \quad f(x,y) = x^y; \quad f(x,y) = \log\left(x + y^2\right); \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z; \quad f(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}; \quad f(x,y,z) = x^{(y^z)}.$$

Příklad 8.28. Nechť
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
Dokažte, že
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Příklad 8.29. Nechť
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
Dokažte, že neexistuje
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Příklad 8.30. Spočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí:
$$f(x,y) = x^m y^n, \quad f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2};$$
$$f(x,y) = e^{xy}, \quad f(x,y) = xy + yz + zx, \quad f(x,y) = \frac{z}{x^2+y^2}.$$

Příklad 8.31. Odhadněte chybu následujících veličin v závislosti na chybě jednotlivých proměnných:
$$(1+x)^m(1+x)^n, \quad \log(1+x)\log(1+y), \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Příklad 8.32. Objem válce s podstavou o poloměru r a výšce h je dán vzorcem $V = \pi r^2 h$. Je-li výška $v = 5$ cm změřena s přesností na 0.005 cm a poloměr podstavy $r = 3$ cm je změřen s přesností na 0.01 cm, určete, s jakou největší možnou chybou je určen objem válce V.

Příklad 8.33. Plocha trojúhelníka ABC je dána vzorcem
$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$
Víme-li, že veličiny b, c, α byly naměřeny s přesností na 1% a úhel α byl změřen na $\pi/4$, dokažte, že výsledná plocha je určena s maximální chybou menší než 2.8%.

Výsledky. Příklad 8.23: 1.

Příklad 8.24: 0, 0, ne.

Příklad 8.25: ne.

Příklad 8.26: ano.

Příklad 8.31: $1 + mx + ny$, xy, $x + y$.

Příklad 8.32: $0,345\pi$.

8.4. **Řetízkové pravidlo.**

Příklad 8.34. Spočtěte

$$\frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

kde

$$T(x,y) = x^3 - xy + y^3$$

a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Příklad 8.35. Spočtěte

$$\frac{dH}{dt},$$

kde

$$H(t) = \sin 3x - y$$

a

$$x = 2t^2 - 3, \quad y = \frac{t^2}{2} - 5t + 1.$$

Příklad 8.36. Poloměr podstavy r rotačního kužele roste o 2 cm za sekundu a výška h roste o 3 cm za sekundu. Spočtěte míru růstu objemu V v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

Příklad 8.37. Lokální atmosférická teplota T závisí na prostorových souřadnicích x, y, z daného bodu a na čase t podle vzorce

$$T(x,y,z,t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

Teploměr je připevněn k meteorologickému balónu, který se pohybuje atmosférou po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = t,\ y = 2t,\ z = t - t^2.$$

Určete míru změny teploty v čase $t = 1$.

Výsledky. Příklad 8.34:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 3r^2\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) - 2r\cos\theta\sin\theta,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 3r^2(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta\sin\theta + r^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right).$$

Příklad 8.35:

$$\frac{dH}{dt} = (11t+5)\cos\left(\tfrac{11}{2}t^2 + 5t - 10\right).$$

Příklad 8.36:

$$\frac{dV}{dt} = 125\pi \text{ cm}^3\text{s}^{-1}.$$

Příklad 8.37: teplota roste o 14 stupňů za hodinu.