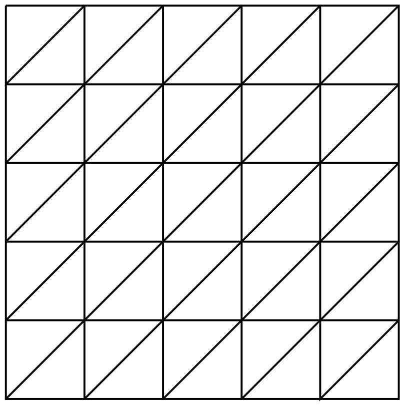
Zápočtová úloha č. 4

Řešte následující okrajovou úlohu metodou konečných prvků:

$$-\Delta u = f \qquad \text{v oblasti } \Omega = (0,1)^2,$$
$$u|_{\partial\Omega} = u_D,$$

kde f je zadaná pravá strana a u_D zadaná Dirichletova okrajová podmínka.

Metoda konečných prvků - lineární aproximace: Uvažujeme následující triangulaci Ω vzniklou dělením s krokem h v x-ovém i y-ovém směru:



Pokud uzly triangulace značíme indexy (i,j), pak uzel $x_{i,j}$ má souřadnice (ih, jh) pro $i,j = 0,\ldots,n$, kde $h = 1/n$. Potom můžeme každému uzlu přiřadit po částech lineární bázovou funkci $\varphi_{i,j}$ takovou, že $\varphi_{i,j}(x_{k,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$ a přibližné řešení hledat ve tvaru

$$u_h(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} u_{i,j}\,\varphi_{i,j}(x,y).$$

Na cvičení jsme odvodili, že metoda konečných prvků v tomto případě dá stejnou soustavu lineárních rovnic jako metoda konečných diferencí:

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f(x_{i,j})$$

pro $i,j = 1,\ldots,n-1$. Neznámé příslušející $\partial\Omega$, tj. $u_{0,j}, u_{n,j}, u_{i,0}$ a $u_{i,n}$, jsou dané okrajovou podmínkou a tedy 'spadnou' do pravé strany.

- Vyřešte soustavu metodou sdružených gradientů (ideálně si ji naprogramujte, v nouzi použijte již hotovou implementaci).
- Podívejte se na chybu metody v uzlech, tj. $u(x_{i,j}) - u_{i,j}$, pro různá h.
- Zkuste získat velmi přesné řešení.
- Vyzkoušejte pro nějakou zajímavou pravou stranu f a nulovou okrajovou podmínku.
- Vyzkoušejte pro nulovou pravou stranu a nějaké zajímavé okrajové podmínky.