3. písemná práce

Martin Vavřík

Nechť $f(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-2x}$. Určete D_f, sudost/lichost/periodicitu, nulové body, obor spojitosti, limity v kraj. bodech D_f, obor spojitosti. Vyšetřete monotonii a určete lokální extrémy f, globální extrémy. Určete R_f, určete zda jsou extrémy ostré/neostré.

Definiční obor: $-1 \leq \frac{1+x}{1-2x} \leq 1 \qquad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$

$x < \frac{1}{2} \qquad\qquad x > \frac{1}{2}$

$2x-1 \leq 1+x \leq 1-2x \qquad 2x-1 \geq 1+x \geq 1-2x$

$x-2 \leq 0 \leq -3x \qquad x-2 \geq 0 \geq -3x$

$\left(x < \frac{1}{2}\right) \wedge (x \leq 2) \wedge (x \leq 0) \qquad (x \geq 2) \wedge (x \geq 0) \wedge \left(x > \frac{1}{2}\right)$

$(-\infty, 0\rangle \qquad \langle 2, \infty)$

$D_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$

Funkce není sudá $(f(x) \neq f(-x))$, lichá $(f(x) \neq -f(-x))$, ani periodická

Nulové body: $\arcsin \frac{1+x}{1-2x} = 0$

$\frac{1+x}{1-2x} = 0$

$1+x = 0 \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$

$x = -1$

1 nulový bod $f(-1) = 0$

Limity v kr. bodech:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to 0\pm} \arcsin \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0\pm} \arcsin \frac{x+1}{x-2} = \arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \arcsin \frac{1+0}{1-2\cdot 0} = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \arcsin \frac{1+2}{1-2\cdot 2} = -\frac{\pi}{2}$

WHY?

Obor spojitosti: fce je spojitá na D_f (aritmetika limit + složené fce) $- \{0; 2\} = (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

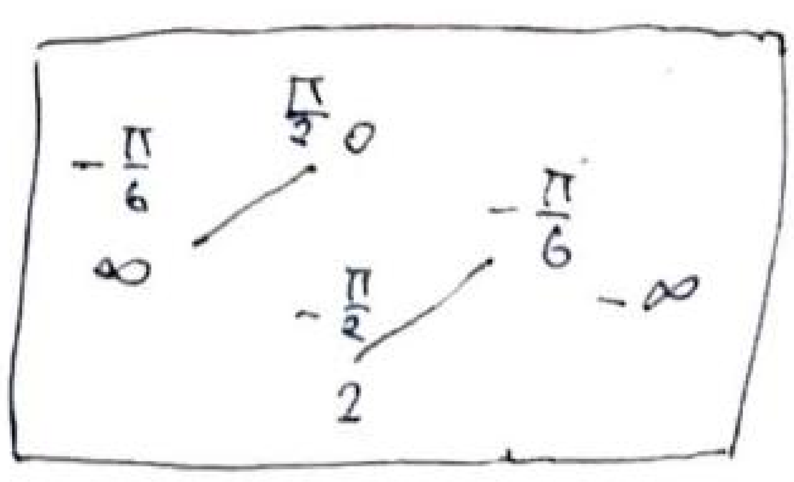
Slozeni spojitych je spojita, a 1+x/1-2x je spojita na R\{1/2}

Derivace: $f'(x) = \frac{(1+x)'(1-2x) - (1+x)(1-2x)'}{(1-2x)^2} \arcsin'\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) = \frac{1-2x+2(1+x)}{(1-2x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)^2}} =$

definována na oboru spojitosti

$= \frac{3}{|1-2x|} \frac{1}{\sqrt{(1-2x)^2-(1+x)^2}} = \frac{3}{|1-2x|} \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2-1-2x-x^2}} = \frac{3}{|1-2x|} \frac{1}{\sqrt{3x^2-6x}} \quad x \notin \langle 0, 2\rangle$

Monotonie – dělíme absolutní h. a $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ $\forall x$ na oboru sp. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ fce je rostoucí na intervalech $(-\infty; 0)$ a $(2, \infty)$ (nikoliv na sjednocení)



Extrémy – globální maximum v bodě $x = 0$; globální minimum v bodě $x = 2$

Lepe zduvodnit: prave spojitosti; derivace v 0 a 2 neexistuji. Co kdyz totiz:

nebo

Obor hodnot – $R_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \setminus \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$

Extrémy jsou ostré

9+

Scanned by TapScanner