Gaussova eliminace

Použití:

1. K nalezení báze prostoru $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k}) \subset \mathbb{R}^n$

2. K řešení soustavy lineárních rovnic.

Postup:

1. Nalezení báze prostoru $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k})$

Napíšeme vektory $v_1, \dots, v_k$ do matice jako **řádkové** vektory (budeme totiž dělat řádkové úpravy). Tedy máme matici $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \dots \\ \mathbf{v_k} \end{pmatrix}$ Lineární obal řádků se nezmění, pokud budeme dělat tyto úpravy:

- výměna dvou řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku nějakého řádku k jinému řádku.

Těmito úpravami můžme upravit matici do takového tvaru, že pro všechna $1 \leq i \leq k$ platí:

i-tý řádek je buď nulový, anebo má první nenulovou souřadnici na pozici p_i a všechny řádky pod ním mají na prvních p_i pozicích nuly.

Budeme v dalším předpokládat, že první nenulová souřadnice je v každém řádku 1 (čehož lze dosáhnout vhodným přenásobením řádků).

Nenulové řádky této matice tvoří bázi $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k})$.

Příklady takových matic (vedoucí „jednička“ je pro přehlednost tučně):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{a pod.}$$

Algoritmus se dá také použít pro vyšetření **lineární (ne)závislosti** vektorů $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k}$. Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když upravená matice obsahuje alespoň jeden nulový řádek.

2. Řešení soustavy lineárních rovnic.

Systém m lineárních rovnic o n neznámých

$$\sum_{j=1}^{n} a^i{}_j \, x^j = b^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

($a^i{}_j$ a b^i jsou čísla, x^j jsou „neznámé“, maticový zápis by byl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) zapíšeme symbolicky do matice jako

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n & b^1 \\ a^2{}_1 & \dots & a^2{}_n & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n & b^m \end{array} \right)$$

Řešení systému se nezmění, pokud budeme provádět tyto úpravy (stejně jak předtím):

- výměna dvou řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku nějakého řádku k jinému řádku

(každou úpravu děláme i s pravou stranou, t.j. b-čka jsou také součásti řádků).

Upravíme systém do tvaru popsaného na předchozí straně a dostaneme mnohem jednodušší systém, který lze vyřešit od poslední rovnice postupným dosazováním.

Pokud chceme systém ještě více zjednodušit, můžme navíc docílit toho, aby *nad* (a nikoliv jen *pod*) každou „vedoucí jedničkou“ byly samé nuly. Příklady na předešlé straně s nějakou přidanou pravou stranou bychom tedy ještě upravili do tvarů

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & c^1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & c^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^5 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & d^1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & d^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & d^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d^4 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & e^1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & e^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & e^3 \end{array} \right).$$

Najít řešení (resp. rozhodnout o jeho neexistenci) je potom snadné. Například v případě první matice v předchozím řádku by řešení existovalo, právě když $c^4 = c^5 = 0$ a řešení by bylo $x^4 = c^3$, $x^3 = c^2$, x^2 libovolné, t.j. položíme $x^2 = t$ (parametr) a $x^1 = c^1 - 2t$.