Opakování II

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti

1. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$
3. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka
4. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomická věta)
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
6. $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (AG nerovnost)
7. $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
8. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
9. $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2 \ldots, n$
10. $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$
11. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$

Číselné obory

Supremum, infimum množin

12. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!
a) $M = (0, 1]$ b) $M = [0, 1]$ c) $M = (0, \infty)$
d) $M = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$ e) $M = \left\{0,5; 0,55; 0,555; \ldots\right\}$
f) $M = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3\right\}$. Ukažte, že $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

13. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
a) $\inf(-A) = -\sup A$
b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$
d) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,
kde A, B obsahují pouze nezáporné prvky.
Množiny $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$, ostatní jsou definovány analogicky.

14. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

15. Nechť M je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že
a) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$. Musí platit rovnost?
b) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x)$
c) $\sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x)$
Definujeme
$$\sup_{x\in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$