8. HODINA

Minule: reprezentace – inv. pp., ireducibilita, spletající operátor, ekvivalence
- spojitost repr. (příklad, ¬ top. $Aut(H)$ norm.; uzavřenost inv. pp., $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$)
- unitarizovat. repr. komp. na H. p. (princip průměrování + B-St.)
- Schur pro k.d. rep., rep. ab. pro k.d. prostory
- $\hat{G}$

G buď lok. komp. grupa (předpoklad celého zbytku přednášky)

Pozn.: $\forall \chi : G \to Aut(\mathbb{C})$ reprezentace sluje charakterem; $\mathbb{C}$ std. top.
obecněji $\to Aut(\mathbb{k})$, $\mathbb{k}$ topol. těleso, např. def. valuací

Pozn.: Charakter se používá v teorii repr. i v jiných významech (stopa reprezentací: $g \mapsto Tr\,\rho(g)$, pokud existuje; nebo bližší kvasi definici jako akce centra univ. obalující algebry).

Pozorování: Pokud χ_1, χ_2 jsou charaktery, pak definujme
$\chi_1\chi_2 : G \to Aut(\mathbb{C})$, $(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$, $g \in G$.
$\chi_1\chi_2$ je také reprezentace (nezávisle na struktuře G):

Dk.: $(\chi_1\chi_2)(gh) = \chi_1(gh)\chi_2(gh) = \chi_1(g)\chi_1(h)\chi_2(g)\chi_2(h) =$
$= \chi_1(g)\chi_2(g)\chi_1(h)\chi_2(h) = (\chi_1\chi_2)(g)(\chi_1\chi_2)(h)$.

Spojitost: snadné cvičení ($|\cdot|_{\mathbb{C}}$).

Pozorování: $\hat{G}_1 := \{\chi : G \to Aut(\mathbb{C}) \mid \chi$ je charakter $G\}$ má strukturu abelovské grupy.

Dk.: • $\chi(g) := Id_{\mathbb{C}} \in \hat{G}_1$, • $\chi_1\chi_2$ viz výše
• $\chi \in \hat{G}_1 \Rightarrow \chi^{-1}$ $(\chi^{-1}(g) := \chi(g)^{-1}) \in \hat{G}_1$ (spoj. + homom. triviální)
• asociativnost: $[(\chi_1\chi_2)\chi_3](g) = [\chi_1(g)\chi_2(g)]\chi_3(g) =$
asoc. $\mathbb{C}$ $= \dots = [\chi_1(\chi_2\chi_3)](g)$

• komutativnost: $(\chi_1\chi_2)(g)=\chi_1(g)\chi_2(g)=\chi_2(g)\chi_1(g)=(\chi_2\chi_1)(g)$. □

Pozn.: nezávislost na výběru reprezentanta?

$\chi_1\simeq\chi_1'$, $\chi_2\simeq\chi_2'$ $\quad \chi_1'\chi_2'(g)=\chi_1'(g)\chi_2'(g)=T^{-1}\chi_1(g)TS^{-1}\cdot$

$\cdot\chi_2(g)S \underset{\substack{\uparrow\\ \text{komut. } \mathbb{C}}}{=} TT^{-1}\chi_1(g)\chi_2(g)S^{-1}S=\chi_1(g)\chi_2(g)=(\chi_1\chi_2)(g)$

$\Rightarrow$ $\hat{G}_1 := \{\chi \mid \chi \text{ je charakter } G\}/\cong$ má také strukturu ab. grupy $([\chi_1][\chi_2])(g):=\chi_1(g)\chi_2(g)$ $\forall g\in G$

• Někdy vhodné „nahradit" $\hat{G}_1$ nějakým selektorem na $\hat{G}_1$.

Pozn.: Všimněme si, že můžeme dle věty o reprezentaci abelovských v případě komutativní G ztotožnit (máme rovnost) $G_1=\{\chi \mid \chi$ je ireducibilní reprezentace G na kon. dim. v. prostoru$\}$. Analogicky pro $\hat{G}_1$.

Nyní se věnujme klasické látce – determinaci ired. reprezentací některých abelovských grup.

! Příklad: Ireducibilní repr. S^1 na H. p. konečné dimenze. (Pozn. kon. dimenze lze v tomto případě dokázat jako důsl. ireducibility a spojitosti. My ji předpokládejme.) Repr. značme $\tilde{\chi}$ či χ... Z V o repr. abel: $\dim H = 1$. Tedy $\tilde{\chi}: S^1\to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, nutně char. Z V o unitarizovatelnosti (ρ, H) je ekv. unitární, nebo přímo dokažme: $1=\tilde{\chi}(1)=\tilde{\chi}(e^{2\pi i})=[\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})]^q$ $\forall q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})\in U(1)\Rightarrow \tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i p}{q}})=\tilde{\chi}(e^{\frac{2\pi i}{q}})^p\in U(1)$.

Dále spojitost (spojitost repr. nebo silná spoj.) Zde však totéž jako spoj. $\to U(1)$ s oper. top.

• $\tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi})v=\tilde{\chi}(\lim\limits_{n\to\infty}e^{2\pi i\varphi_n})v=\lim\limits_{n\to\infty}[\tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi_n})v]=$

$\varphi\in[0,1)$, $v\in H$. $\quad \in H\ (\simeq\mathbb{C})$ $\quad \varphi_n\in\mathbb{Q}$

$= \left[\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i \varphi_n})\right] \lim v_n = \left[\lim_{n\to\infty} \tilde{\chi}(e^{2\pi i\varphi_n})\right] v =$

Věta o limitě součinu (to je ono „totéž")

$\underbrace{}_{U(1)}$

$= Av$, kde $A\in U(1)$, neboť $U(1)$ je uzavřená v $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Tj. přímo jsme obdrželi, že $\tilde{\chi}$ je dokonce unitární. $\forall \varphi\in\mathbb{R}$ položme $\chi(e^{i\varphi}) := \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}})$, kde $\tilde{\varphi}\in[0,1)$ a $\tilde{\varphi}\equiv\varphi \bmod \mathbb{Z}$. Zejm. kvůli návaznosti na předn. $\underset{\in\mathbb{C}}{\chi_\varphi} := \underset{(\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C})}{\chi(e^{i\varphi})}$. Máme $\chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \chi_{\varphi_1}\chi_{\varphi_2}$ $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}$

Zvolme $\ln = \ln_\psi$, aby vnitřek výřezu $\ln_\psi$ byl disj. s paprsky $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ a $\widetilde{\varphi_1+\varphi_2}$. Pak $\ln\chi_{\varphi_1+\varphi_2} = \ln\chi_{\varphi_1} + \ln\chi_{\varphi_2}$ a položme $f(\varphi) := \ln\chi_\varphi$. Máme $f(\varphi_1+\varphi_2) = f(\varphi_1)+f(\varphi_2)$. Její spojitá řešení známe $f(\varphi) = c\varphi$, $c\in\mathbb{C}$. Používáme již zmíněný fakt, že $\tilde{\chi}$ je spojitý i jako zobrazení $S^1 \longrightarrow U(1)$, kde $U(1)$ má normovou topologii $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, jež se kryje s operátorovou, ale především se silnou, jež definuje spojitost reprezentací.

Je tedy $\chi(e^{i\varphi}) = e^{ic\varphi}$. Kvůli unitaritě χ nutně $c\in\mathbb{R}$. Spojitost χ vynutí $c\in\mathbb{Z}$.

Nyní ověřím, že $\chi_n(e^{2\pi i\varphi}) = e^{2\pi i n\varphi}$ je homom. (triv.) a spojitá (opět jen dle základ. vět z mat. analýzy) a získám, že $\chi_n\in\widehat{S^1}$.

Označím-li $\widehat{S^1}_{k.d}$ ($\forall$ ired. k.d. repr. S^1), vidíme $\widehat{S^1}_{k.d.}\simeq\mathbb{Z}$.

[Jak řečeno, $\widehat{S^1}\simeq\mathbb{Z}$ (pro $\forall$ ired na H.p.)]

Pozn.: $f(\varphi_1)+f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2)$ známá Cauchyho funkcionální rovnice.

- $f(n) = f(n-1+1) = f(n-1)+f(1) = \dots = \underbrace{f(1)+\dots+f(1)}_{n\text{-krát}} = n\underset{c}{\underset{\shortparallel}{f(1)}}$
- $c = f(1) = f(\underbrace{\tfrac{1}{q}+\dots+\tfrac{1}{q}}_{q\text{-krát}}) = qf(\tfrac{1}{q}) \Rightarrow f(\tfrac{1}{q}) = \tfrac{c}{q}$.

- $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p\text{-krát}}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{q}\right) = p f\left(\frac{1}{q}\right) = c\,\frac{p}{q}$.
- Ze spojitosti (a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$): $f(x) = cx \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

[„Mnohoúsp. řešení" využívajících „bází" $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.]

Pozorování: • $c_n(f) = \int_0^1 f(\varphi)\, e^{-2\pi i n \varphi}\, d\varphi$, $\varphi \in [0,1]$, je tzv. n-tý koef. F. řady 1-periodické funkce z $L^1(\mathbb{R})$. (Otázky bodové konvergence nyní pomineme.)

Je tedy $\boxed{c_n(f) = \int_{S^1} f\, \overline{\chi_n}\, d\mu}$, kde nyní

$$\mu(U) := \int_0^1 \chi_U(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi)\, d\lambda(\varphi), \quad U \subseteq S^1 \text{ měřitelná}$$

Leb. míra na $\mathbb{R}$

Jde o tutéž míru jako v příkladě 4 Haarových měr. Jen volíme jinou „parametrizaci" kružnice (V glob. analýze otázka parametrizací podstatná, byť se pak ukáže nezávislost v příp. orientovaných reparametrizací, na nich.)

• Konvergence: Máme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \varphi} \longrightarrow f$ v $L^1(\mathbb{R})$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, jež je 2π periodická.

(Bodové konvergence: $\sum |c_n| n^k < \infty \wedge f^{(k+1)}$ spoj. $\Rightarrow$ dokonce $\left(\sum c_n e^{2\pi i n \varphi}\right)^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$ bodově možná za dalších drobných předpokladů.)

Nelze $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ interpretovat také jako integrál podle Haarovy míry, jako v rámečku výše?

$\overset{\nabla}{\circ}$ __Příklad__ : Ired. repr. $\mathbb{Z}$ na __k. d.__ (Hilb.) prostoru.

Z věty o repr. komut. $\chi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(H) \Rightarrow \dim H = 1$.
$\chi(m+n) = \chi(m)\chi(n)$. Opět logaritmuji, bera ohled na výřezy. Dospěji ke Cauchyově rovnici.
$\chi_c(m) = e^{2\pi i m c}$, $c \in \mathbb{C}$ libovolné. χ_c je zřejmě repr. $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{C}$. Ireducibilita, již jsme příliš nesmiňovali, je u repr. dim 1 zřejmá: $\mathbb{C}$ nemá žádný netriv. vl. podprostor.

- Chceme-li však jen unitární, získáme omezení $|e^{mc}| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, c = 0 \Rightarrow$ uvažujeme nutně jen $\chi_{\cdot x}(m) = e^{2\pi i x m}$, $x \in \mathbb{R}$. Celkem $\chi_{\cdot x} \in \hat{\mathbb{Z}}$ (spojitost sami).
- Všimněme si, že $x \equiv y \mod \mathbb{Z}$, pak $\chi_{\cdot x} = \chi_{\cdot y}$.
- Definujme-li, nyní však s předp. unitarity, $\hat{\mathbb{Z}}_{k.d} := \{\chi \mid \chi$ je ired. unit. repr. $\mathbb{Z}$ na k.d. Hilb. prostoru$\}$, vidíme, že $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}_{k.d.}$, $r \mapsto \chi_{\cdot r}$ je na. Injektivita z min. periody $z \mapsto e^{2\pi i z}$. Celkem
$$\hat{\mathbb{Z}}_{k.d.} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$\overset{\nabla\nabla}{\circ\circ}$ Všimněme si, že $\hat{\mathbb{Z}}_{k.d} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ a $\hat{S}^1_{k.d.} \simeq \mathbb{Z}$. To to je základem Pontrjaginovy duality.

Pozn.: Ve fyzice (kvantové) typicky místo $\mathbb{R} \to i\mathbb{R}$ a místo $\mathbb{Z} \to i\mathbb{Z}$.

∇ **Příklad**: Ired. unit. repr. $\mathbb{R}$ na k.d. Hilb. prostoru.

Opět $\dim H = 1$. $\chi : \mathbb{R} \to U(1) \subseteq \mathbb{C}$ buď tedy spojitý homomorfismus $\mathbb{R}$ do $U(1)$.

$\exists \delta > 0 \quad \chi([-\delta, \delta]) \subseteq \{z \mid \overset{Re}{\cancel{Im}}(z) > 0\}$ *) ze spoj.

Nechť $y \in [-\frac{1}{4\delta}, \frac{1}{4\delta}]$, že $\chi(\delta) = e^{2\pi i \delta \cancel{y}}$.

($\exists!$ Jedu $y_0 \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ pro $e^{2\pi i y_0} \in \{z \mid \overset{Re}{\cancel{Im}}(z) > 0\}$.)

Dále analogicky (předchozí jsme x) ; zkusme bez logaritmu...: $\chi(\frac{\delta}{2})^2 = \chi(\frac{\delta}{2})\chi(\frac{\delta}{2}) = \chi(\delta) = e^{2\pi i \delta \cancel{y}} \Rightarrow$

$\chi(\frac{\delta}{2}) = \pm e^{\cancel{2}\pi i \delta \cancel{y}} \left(= \cos(2\pi \delta \cancel{y}) \pm i \sin(2\pi \delta \cancel{y}) \right) \overset{?}{\in}$

$\overset{?}{\in} \{z \mid \overset{Re}{\cancel{Im}}\, z > 0\} \Big) \Rightarrow \chi(\frac{\delta}{2}) = e^{\cancel{2}\pi i \delta \cancel{y}}$. Pokračujeme-li, pak

$\chi(\frac{\delta}{2^n}) = e^{2\pi i \cancel{y} \frac{\delta}{2^n}}$. Dále $\chi(\frac{k}{2^n}\delta) = \left(e^{2\pi i \cancel{y}\frac{\delta}{2^n}}\right)^k$

$= e^{2\pi i \cancel{y} \frac{k\delta}{2^n}}$. Ze spojitosti a hustoty

$\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$: $\chi_y(x) = e^{2\pi i x y} \;\forall x \in \mathbb{R}$; označení tedy χ_y. Celkem opět s analog. ozn. (unitarita nutná pp.) $\hat{\mathbb{R}} \underset{k.d.}{\simeq} \mathbb{R}$ ($\chi_y \leftrightarrow y$).

Pozn.: Zde vidíme $\hat{\mathbb{R}} \underset{k.d.}{\simeq} \mathbb{R}$, tj. „$\mathbb{R}$ je samoduální".

Co by to značilo pro konvergenci? $f = \hat{\hat{f}}$? Kde

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f\, e^{-2\pi i x y}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\chi_y(x)}\, d\lambda(x) \quad \text{a} \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \dots = f$$

*) Chyba v Deitmar "First course on harm.": $\mathrm{Re}\, z > 0$ ...

Vystihuje tedy složitou formuli pro inverzi Fourierovy transformace?

5. Základy Banachových algeber a Gelfandovo zobrazení

<u>Definice</u>: Nechť G je lok. kompaktní grupa a μ je nějaká její Haarova míra. $L^p(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \mid \int |f|^p d\mu < +\infty\}$ a $\|f\|_p := \int_G |f|^p d\mu$.

<u>Definice</u>: $f, g \in L^1(G)$. Pak $(f * g)(x) = \int f(y) g(y^{-1}x)\, d\mu(y)$ nazvu konvolucí f a g, kdykoliv existuje.

<u>Věta</u> (ex. konv.): $f, g \in L^1(G) \Rightarrow f * g \in L^1(G)$.

Dk.: a) $f * g$ je měřitelná. Vynechám, viz D.-E. "Principles".

b) $$\|f * g\|_1 \leq \int_G \int_G |f(y) g(y^{-1}x)|\, d\mu(y)\, d\mu(x) \overset{\text{Fubiniho v.}}{=}$$

$$= \int_G \int_G |f(y) g(y^{-1}x)|\, d\mu(x)\, d\mu(y) \overset{\mu \text{ je levá H.}}{=} \int_G \int_G |f(y) g(x)|\, d\mu(x)$$

$$d\mu(y) \overset{\text{linearita} \int}{=} \int_G |f(x)|\, d\mu(x) \int_G |g(x)|\, d\mu(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad \square$$

<u>Pozn.</u>: 1. $f * g$ $\exists$ tedy s.v. (a je z L^1).

2. Lze $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G) \Rightarrow f * g$ $\exists$ s.v. $(1 < p, q < \infty)$. Hölderova nerovnost.

3. měřitelnost není zcela snadná.

G lok. komp $\Longrightarrow (L^1(G), *, \|\cdot\|_1)$ algebraicko-anal. stra

Nejdříve k algebraické.

Věta: $(L^1(G), *, +)$ je asociativní algebra nad $\mathbb{C}$.

okruh

Dk.: a) $* : L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, dv. Předch. věta. ✓

$+ : L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, dv. Δ-nerovnost (v $\mathbb{C}$). ✓
+ linearita $\int$

b) Distr.: $$[(g+h)*f](x) = \int_G (g+h)(xy^{-1}) f(y)\, d\mu(y) \overset{\text{lin} \int}{=} \int_G g(xy^{-1}) f(y)\, d\mu + \int h(xy^{-1}) f(y)\, d\mu =$$
$$= (g*f)(x) + (h*f)(x) \quad \forall x \in G$$ ✓

Zprava analog.

c) Asociativnost:
• $$[f*(g*h)](x) = \int_{y \in G} f(y) (g*h)(y^{-1}x)\, d\mu(y)$$
$$= \int_{y \in G} f(y) \int_{z \in G} g(z) h(z^{-1}y^{-1}x)\, d\mu(z)\, d\mu(y)$$

algebra

• $$[(f*g)*h](x) = \int_{y \in G} (f*g)(y) h(y^{-1}x)\, d\mu(y) =$$
$$= \int_y \int_z f(z) g(z^{-1}y) h(y^{-1}x)\, d\mu(z)\, d\mu(y) \overset{\text{Fubini} + z \leftrightarrow y}{=}$$
$$= \int_y \int_z f(y) g(y^{-1}z) h(z^{-1}x)\, d\mu(z)\, d\mu(y) \overset{\text{levá}}{=}$$
$$= \left| z' = y^{-1}z \right| = \int_y f(y) \int_z f(z') h(z'^{-1} y x)\, d\mu(z')\, d\mu(y)$$

d) $c(f*g) = (cf)*g = f*(cg)$ $\forall c \in \mathbb{C}$ triv. (linearita).

$c(f+g) = cf + cg$ $\wedge$ $(c+d)f = cf + df$ $\forall c, d \in \mathbb{C}$ | def + a nás. sk. ∎