[7 hod.]

4. Základy teorie reprezentací topologických grup

<u>Motivace</u>: Chceme analog „$e^{2\pi i(x,y)}$ pro obecnou grupu."

$x \in \mathbb{R}^n$ pevné, $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto e^{2\pi i(x,y)}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad e^{2\pi i(x,y)}(z) := e^{2\pi i(x,y)} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Takto chápaná exponenciála je element $U(1)$,

$U(n) = \{A \in Mat(n,n;\mathbb{C}) \mid A^*A = 1\!\!1_n\}$

$A^* = \overline{A^T}$, $1\!\!1_n = E$

<u>Def.</u>: G topologická grupa, H úplný lokálně konvexní topologický vektorový prostor (Banachův, Hilbertův...). Každý homomorfismus $\rho: G \to Aut(H)$ nazveme reprezentací G na H, pokud je přidr. zobrazení $\psi: G \times H \to H$ spojité, kde $\psi(g,v) = \rho(g)v$ $\forall g \in G$ a $v \in H$. Často ozn. (ρ, H).

$\rho_v(g) := \psi(g,v)$

<u>Označení</u>: $Aut(H) := \{T: H \to H \mid T$ je bijekce, T je spojitá a s spojitou inverzí$\}$ (T je homeomorfismus; někdy pomůže ~~věta~~ o otevř. zobr. „Banach")

<u>Př.</u>: 1. $\rho: SO(3) \to Aut(\mathbb{R}^3)$ $\quad \rho(g)(v) := g(v)$, $\forall g \in G$, $v \in \mathbb{R}^3$ (tautologická repr.); $SO(n) := \{A \in Mat(n,n;\mathbb{R}) \mid A^TA = 1\!\!1_n$, $\det A = 1\}$

2. $\chi_x: \mathbb{R} \to Aut(\mathbb{C})$, $\chi_x(t)v := e^{2\pi i x t}v$, tzv. unitární charakter $\mathbb{R}$ (příslušný x) ... právě ve Fourierově transf.

3. $\rho: \mathbb{R} \to Aut(L^2(\mathbb{R}))$, $[\rho(s)f](t) = f(t-s)$; na $L^2(\mathbb{R})$ top. ind. $(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \bar{f} g \, d\lambda_{\mathbb{R}}$

tzv. indukovaná levou translací $L_s(t) := s+t$

$(\rho(s)f = L_s f \; (= f \circ L_{s^{-1}} = f \circ L_{-s}))$

4: $\rho_m: S^1 \to Aut(\mathbb{C})$ $\quad \rho_m(e^{2\pi i\varphi})z := e^{2\pi i m\varphi} \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$

Pozn.: Kdybychom uvažovali topologii na $\mathrm{Aut}(H)$, $\dim H = \infty$, 2

např. v případě H Banachův indukovanou například operátorovou normou, ukazuje se, že „běžné" reprezentace (jen homomorfizmy) byly nebyly spojité.

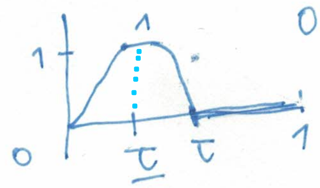
Př. (cvičení): $\varrho : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{} \mathrm{Aut}(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_{=:H})$, kde std. topol ($\cong S^1$), Banachův

na $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ uvažuji $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f(t)|$ ($\exists$ spoj. na kpt.),

$(\varrho(t)f)(x) := f(x-t)$, $x, t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

1. $\varrho \ldots \varrho(t) : C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \underset{\text{do}}{\longrightarrow} C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; $\varrho(t)f$ zjevně spojitá.
2. $\varrho \ldots$ homom. (triv)
3. ϱ ale není spoj. jako zobr $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\underbrace{C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}_{H})$ s op. topol. indukovanou $\|\ \|$.

Vezmeme f_τ (pro $\tau > 0$)



$0 \le f_\tau \le 1$ a $f_\tau(\frac{\tau}{2}) = 1$, $\operatorname{supp} f_\tau \subseteq [0, \tau]$

$\|f_\tau\| = 1$, $\|\varrho(\tau) - \mathrm{Id}\|_{op} \ge \|\varrho(\tau) f_\tau - f_\tau\| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |f_\tau(x - \tau) - f_\tau(x)|$

V rozdílu se nevyruší: stále sup je 1

Tj. $\|\varrho(\tau) - \mathrm{Id}\|_{op} \ge 1 \quad \forall\, 0 < \tau < 1$

Triviálně $\|\varrho(0) - \mathrm{Id}\|_{op} = \|\mathrm{Id} - \mathrm{Id}\|_{op} = 0$

Existuje i „přirozenější" případ $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightsquigarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

Půjde nám o tzv. unitární reprezentace, tj. H bude Hilbertův prostor; $(\,,\,)$ sk. součin na něm.

Def: $\rho : G \to Aut(H)$ reprezentaci, nazveme unitární, pokud $\forall g \in G$ $(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w)$ $\forall v, w$

Pozn.: • Tj. $\rho \xrightarrow{do} U(H) = \{T : H \to H \mid T^* T = T T^* = \mathbb{1}_H\}$ $= Id_H$ spojité $\exists T^*$

Obecně izometrie je slabší pojem, neb nemusí být na (tedy nemusí být bijekce). Slabší: $\exists$ izometrie, jež nesplňuje rci v def $U(H)$.

• Pokud H je nad $\mathbb{R}$, stále mluvíme o unit. rep. Def T^* je: $(T^* v, w) = (v, Tw)$ $\forall v, w$ nezávisle na tělese.

Př.: 1. $\rho : SO(n) \to Aut(\mathbb{R}^n)$ $\rho(g)(v) = g(v)$, tzv. tautologická repr. ortogonální grupy.

2. Shift $T(e_i) := e_{i+1}$ v separabilním Hilbertově prostoru není (není na), $i \in \mathbb{N}_0$, $\dim H = \infty$.

Speciální význam pro unitárnost je kompaktnost grupy.

Věta (unitarizovatelnost repr. komp. grup): Buď G kpt. grupa a $\rho : G \to Aut(H)$ repr. G na Hilb. prostoru $(H, (\,,\,))$. Pak existuje sk. součin $((\,,\,))$ na H, že $(\rho, (H, ((\,,\,))))$ je unitární a topologie $(H, (\,,\,))$ a $(H, ((\,,\,)))$ jsou stejné.

Dk.: Nechť μ je pravá (nutně i levá dle věty z minulé hodiny, $\Delta = 1$) Haarova míra na G. Definujme: $((v, w)) := \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w)\, d\mu$, $\forall v, w \in H$.

1\. Korektnost: • $\underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)w)}$ je spojitá (stačí pro pev- $\psi(g,v) = \psi(g,w)$ ná v a w). Spojitá na komp. má $\int$.

2\. • $((v,v)) = \int_G \underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)v)}_{\geq 0} d\mu \geq 0$

(jasné) • $0 = ((v,v)) = \int \underbrace{(\rho(g)v, \rho(g)v)}_{\geq 0 + \text{spoj.}} d\mu = 0 \Rightarrow$

$(\rho(g)v, \rho(g)v) = 0 \Rightarrow \rho(g)v = 0 \xRightarrow{\rho(g) \text{ inj}} v = 0$

Je to sk. součin.

2\. ρ je unitární („nic to (g'I snadné“): $\forall h \in G\ \forall v,w \in H$

$((\rho(h)v, \rho(h)w)) = \int (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w)\, d\mu =$

$= \int_G (\rho(gh)v, \rho(gh)w)\, d\mu_{g \in G} = \left| \begin{matrix} g' = gh \\ \mu \text{ je pravo inv.} \end{matrix} \right| = \int_G (\rho(g')v, \rho(g')w)$

$d\mu = ((v,w))$.] Stačila pravost. [

3\. $\underset{|\cdot|}{(\,,\,)}, ((\,,\,))$ – topologie. Ekvivalence norem. $\|v\|^2 = \int_G (\rho(g)v,$

$\rho(g)v)\,d\mu = \int_G |\rho(g)v|^2 d\mu$. $g \mapsto |\rho(g)v|^2$ spojitá

(z def. repr. (pomocí $(\,,\,)$!)) pro $\forall v \in H$. Je def na

kpt. $\Rightarrow$ je omezená.

Banach-Steinhaus („bodová om. $\Rightarrow$ stejn. om.“):

$\sup_{g \in G} \|\rho(g)v\|_H < \infty\ \forall v$, což jsme právě ověřili, tak

$\sup_{g \in G, \|v\|=1} |\rho(g)v| \left(= \sup_{g \in G} \|\rho(g)\|_{op}\right) < \infty$

$$M := \sup_{g\in G} |\rho(g)|_{op} < \infty$$

známé

$$\underline{|\rho(g)v|^2} \le |\rho(g)|_{op}^2 |v|^2 \le \underline{M^2|v|^2}$$

$$M^{-2}|v|^2 = M^{-2}|\rho(g^{-1})\underline{\rho(g)v}|^2 \le M^{-2}M^2|\rho(g)v|^2 = |\rho(g)v|^2$$

$$cM^{-2}\|v\|^2 \le \|v\|^2 \le M^2|v|^2 c,$$ kde $c = \int_G d\mu$ (klasická normal.) 1

4. ρ spoj. vůči $(H, |\cdot|) \xRightarrow{3.} \rho$ je spoj. vůči $(H, \|\cdot\|)$.

Celkem $(\rho, (H, ((\,,\,))))$ je unitární reprezentace. $\square$

Definice: i) ρ buď repr. G na úplném lok. konvexním topologickém prostoru H. Uzavřený podprostor $H' \subseteq H$ nazvu invariantní, je-li

$$\rho(g)H' \subseteq H' \quad \forall g \in G.$$

ii) Reprezentaci nazvu ireducibilní, nemá-li žádný netriviální ($\neq 0$) vlastní ($\neq H$) podprostor.

iii) ρ' buď repr. G na úplném lok. konv. top. prostoru H'. ρ' nazvu ekvivalentní ρ, pokud existuje lineární homeomorfismus T H na H', že $T\rho(g) = \rho'(g)T$

$$\left(\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\rho(g)} & H \\ T\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T \\ H' & \xrightarrow[\rho'(g)]{} & H' \end{array}\right) \forall g \in G.$$

Označím: $\rho \simeq \rho'$ nebo $(\rho, H) \simeq (\rho', H')$

Pozn.: Ad uzavřenost. Příklad s translací spojitých: $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ zřejmě je inv. podprostorem, $\forall k>0$, vč. $k=+\infty$

$C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ však není uzavřen v $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

~~($C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ bych chtěl prohlásit za ireduc., analytické aspekty by mi naopak umožnily najít nekonečně mnoho invariantních podprostorů.)~~

! **Pozn.:** Pokud (ρ, H) a (ρ', H') jsou unitární, tak požaduji navíc pro jejich ekvivalenci, aby $T: H \to H'$ byla izometrická bijekce, tj. $(Tv, Tw)_{H'} = (v, w)_H \ \forall v, w$ (někdy též unitární nazývaná).

Označení: $\hat{G}$ je množina všech ireducibilních unitárních reprezentací G podle relace ekviv. $\simeq$

[Obecněji $\hat{G}$ $\forall$ ired $/\simeq$ a $\hat{G}_u /\simeq$ unitárních ired.]

Pozn.: $\hat{G}$ se říká duály a jejich popis je hlavním předmětem teorie reprezentací (topolog. grup).

<u>Def</u>: Operátorům z definice ekviv. reprezentací se říká ekvivariantní nebo splétající (nebo G-homomorfizmy). Jejich prostor se značí $\mathrm{Hom}_G(H, H')$ apod.

<u>Pozorování</u>: • $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \mathrm{Im}\, T$ je invariantní, pokud $\dim H' < \infty$. $\mathrm{Im}\, T$ uzavřený (jinak uzávěry a limity, spojitost je dobře přizpůsobena).

$$\rho'(g)\underbrace{Tv}_{=w \in \mathrm{Im}\, T} = T(\rho(g)v) \in \mathrm{Im}\, T$$

• $T \in \mathrm{Hom}_G(H, H') \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T$ je invariantní. Uzavřenost ze spojitosti ($\mathrm{Ker}\, T = T^{-1}(\{0\})$; každý TVS je Hausdorffův v z předpokladu).

$v \in \mathrm{Ker}\, T$, $\rho(g)v \in \mathrm{Ker}\, T$? Ano, neb

$$T(\rho(g)v) = \rho'(g)Tv = 0.$$

Dále již H, H' ... konečně rozměrné a komplexní. Zdá se, že se v Schur. lemmatu předp., že $\dim H, \dim H' > 0$.

<u>Schurovo lemma o ekviv. zobr.</u>: Nechť (ρ, H), (ρ', H') jsou dvě ireducibilní repr. na kon. dimenzionálních prostorech nad tělesem $\mathbb{C}$. Pak

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \rho \not\simeq \rho' \\ 1 \Leftrightarrow \rho \simeq \rho'. \end{cases}$$

Dk.: a) $\dim_{\mathbb{C}} = 0$ $\not\Leftarrow$ $\rho \simeq \rho' \Rightarrow \exists T$ bijekce $\Rightarrow$ nenulová $\Rightarrow \mathrm{Hom}_G(,) \neq 0$ ↯

b) $\dim_{\mathbb{C}} = 1 \Rightarrow \exists 0 \neq T : H \to H'$ a T splétající: $\mathrm{Ker}\, T$ inv. $\overset{\text{ir.}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Ker}\, T = 0$ v $\mathrm{Ker}\, T = H$. Druhá nelze, neb T by byl 0.

$\mathrm{Im}\, T$ inv. $\Rightarrow \mathrm{Im}\, T = H'$ v $\mathrm{Im}\, T = 0$. Druhá nelze, neb T opět $\neq 0$.

Celkem T je inj. a na, tedy $\rho \simeq \rho'$.

c) $\rho \not\cong \rho'$ & $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') > 0 \Rightarrow \exists T$ spletající nenulový

Obdobně, jak b.: $\mathrm{Ker}\, T = 0 \vee \mathrm{Ker}\, T = H$ ~~&~~ . Celkem T je bijekce,
$\mathrm{Im}\, T = 0$ ~~&~~ $\vee \mathrm{Im}\, T = H'$

což je spor s $\rho \not\cong \rho'$.

d) Nejtěžší" (zákl. v. algebry): $\rho \cong \rho' \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') \geq 1$
(exist. splet.) Buďte $T, S \in \mathrm{Hom}_G(H, H')$. Chceme jejich lin.
Zav. ~~nez~~. Pokud je asp. jeden z nich nulový, je on l.z. Večet
oba nenulové, Vezmi ~~napr.~~ T. Pak T je bijekce (stejně jako v b) v
c), $\mathrm{Im}\, T = 0 \vee \mathrm{Ker}\, T = H$ ~~&~~ kvůli nenulovosti). Vezmi
$T^{-1}S : H \to H \overset{\text{Gauss/Liouville / Sylvester}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}\ \mathrm{Ker}(T^{-1}S - \lambda) \neq 0$ (existence vl.-v. nad $\mathbb{C}$)
$T^{-1} \in \mathrm{Hom}_G$, S také, Id také $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,(T^{-1}S - \lambda Id) \neq 0$
inv. třed.
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,(T^{-1}S - \lambda\, Id) = H \Rightarrow T^{-1}S = \lambda\, Id.$ $\square$
Tj. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(H, H') \leq 1$.

Pozn.: 1. $\exists$ modifikace nad $\mathbb{R}$ (i nad $\mathbb{H}$). Snadno ale $\rho: SO(2) \to$
$\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ tautol. Je i řed.: Id i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ spletají
tzv. sympl. forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\varphi & c\varphi \\ -c\varphi & s\varphi \end{pmatrix}.$$

Lze ukázat, že generují Hom_G

$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_G = 2$; ale $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G = 1$ opět.

2. Zobecnění pro unitární reprezentace nebo repr. kpt. grup na Hilb. prostorech (viz unitarizovatelnost v tomto druhém případě).

3. Neekv. ired. nemají kromě nulového žádný splétající
Ekv. ireducibilní: Splétající jsou jen násobky jednoho zvoleného. Příp. $H=H'$ jde o Id.

Důležité jsou reprezentace abelovských.
↑ v harmonické analýze (tzv. komut. harm. anal.)
(Níže Opět $\dim H > 0$.)

<u>Věta (ired. repr. abelovských)</u>: (ρ, H) buď konečně dimenzionální ireducibilní komplexní repr. abelovské G. Pak $\dim_{\mathbb{C}} H = 1$.

Dk.: 1) $\forall h$ $\rho(h)$ je splétající. $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h) \circ \rho(g)$ $\forall g \in G$

2) Dle Schur. lemmatu $\forall h$ $\exists c_h \in \mathbb{C}$: $\rho(h) =: c_h \mathbb{1}_H$

3) $v_0 \in V$ buď nenulový. Pak $\rho(h) v_0 = c_h \mathbb{1}_H v_0 = c_h v_0 \in \langle v_0 \rangle$. Odkud $\langle v_0 \rangle$ je inv.

4) Z ireducibility (ρ, H) je $H = \langle v_0 \rangle$, tj. $\dim H = 1$ □

Pozn.: 1) Komplexnost V opět. rel. důl.: $\rho : SO(2) \to Aut(\mathbb{R}^2)$ tautol a ired, $SO(2)$ abel, ale $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^2 = 1$). Rovnost v závorce je nutné interpr. tzv. komplexní strukturou.

2) $G = \mathbb{C}(t)^\times$ těleso rac. fcí bez 0. To je grupa.
$\rho : \mathbb{C}(t)^\times \to Aut(\mathbb{C}(t))$, $\rho(f)(g) = fg$.
Je ired., ale $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t) = +\infty$. Tj. pp. k. dimenze je podst. Zde je ovšem v našem kontextu otázka spojitosti podstatná. (Aby zapadla do kont. HA, museli bychom vybavit $\mathbb{C}(t)^\times$ topol. a testovat spoj. ρ.

Zpět k $\mathbb{Q}_p$. Definovali jsme, archimedovské těleso ("víme", co je marchimedovské := není archim.)

CVIČENÍ 7.h

Nyní

<u>Def</u>: Je-li $\|\cdot\| : \mathbb{k} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ valuace na $\mathbb{k}$ ($\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$, $\|xy\| = \|x\|\|y\|$, $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, $\forall x,y \in \mathbb{k}$) a je-li navíc $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|,\|y\|\}$, pak tuto valuaci nazveme <u>nearchimedovskou</u>.

<u>Lemma</u>: Je-li $\|\ \|$ narchimedovská $\Rightarrow$ ($\|x\| \neq \|y\| \Rightarrow \|x+y\| = \max\{\|x\|,\|y\|\}$), a navíc $(\mathbb{k}, \|\cdot\|)$ je narchimedovské.

Dk.: 1. BÚNO $\|x\| > \|y\|$. Chceme $\|x+y\| = \|x\|$.

(narch.) Víme $\|x+y\| \leq \|x\|$. Stačí $\|x+y\| \geq \|x\|$.

$\|x\| = \|(x+y)-y\| \leq \underset{①}{\|x+y\|}$ nebo $\overset{*)}{\leq} \underset{②}{\|y\|}$ (nearchim.)

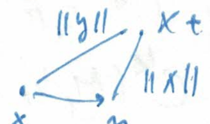
Ale ② ↯, tj. ①, cbd.

2. $x = 1 = y$ ($1 \neq 0$ to je součástí def.)

$\|1\| \leq \|1\|$ $\quad \forall n$ $\|n1\| \leq \max\{\|1\|, \|(n-1)1\|\} \leq$

$\max\{1,\dots,1\} = 1 \not> \|y\|$. $\square$

<u>Př.</u>: Každý trojúhelník v $\mathbb{k}$ je rovnoramenný!



$d(a,b) = \|a-b\|$

↯ $\|x\| \neq \|y\| \Rightarrow \|x+y\| = \|x\| \vee \|x+y\| = \|-y\| = \|y\|$

Tj. opět se shodují! ($\|-1\| = 1$, viz *))

<u>Př.</u>: $D_r(0) = \{x \in \mathbb{k} \mid \|x\| < r\}$. Pak $\forall z \in D_r(0)$ je středem $D_r(0)$,

tj. $\forall x \in D_r(0)$ $\|x-z\| < r$.

---

*) Pokud jen $\|x\| = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} x = 0$, tak stále možné $\|0\| = 1$, neb "mám jen" (tuto alternativu) Hlavní však $\|x\| = 1$ $\forall x$ splní def. valuace.

$\|0\| = \|0\|^2 \Rightarrow \|0\| = 0 \vee \|0\| = 1$. ! Ovšem $\|1\| = \|1\|^2 \Rightarrow \|1\| = 0$ (↯ i jen s (*)) $\vee$ $\|1\| = 1$.

Odtud $1 = \|1\| = \|-1\|^2 \Rightarrow \|-1\| = 1 \Rightarrow \|x-y\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$.

Dk.: $z \in D_r(0) \Rightarrow \|z\| < r$

$\|x - z\| = ?$ • $\|x\| < \|z\| \Rightarrow \|x-z\| = \|z\| < r$

• $\|x\| > \|z\|$ $\quad \|x-z\| = \|x\| < r$

• $\|x\| = \|z\|$ $\quad \|x-z\| \leq \max\{\|x\|, \|z\|\} \leq r$

$\square$