Lemma (k důkazu Tych. věty): Nechť $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in A}$ jako výše.

Nechť $\mathcal{U}$ je otevř. pokrytí $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, avšak sestávající výlučně z množin $\pi_\alpha^{-1}(O)$, $O\in\tau_\alpha$. Pak $\mathcal{U}$ má kon. podpokrytí.

Dk.: Pozn. (sestávat): $\mathcal{U} =: (U_\beta)_{\beta\in B}$. $\forall \beta\in B\ \exists \alpha\in A$ $\exists O\in\tau_\alpha\ U_\beta = \pi_\alpha^{-1}(O)$. Ozn.: $\mathcal{U}_\alpha := \{O\in\tau_\alpha \mid \pi_\alpha^{-1}(O)\in\mathcal{U}\}$

IDEA DK: Aspoň jedno pokryje / vyberu / zvednu.

1. Tvrdím: $\exists \alpha_1\in A$, že $\mathcal{U}_{\alpha_1}$ pokrývá X_{α_1}. Sporem:

$\forall\alpha\in A$ $\mathcal{U}_\alpha$ nepokrývá X_α, tj. $\forall\alpha\in A\ \exists x_\alpha \in$
$\in X_\alpha \setminus \bigcup\mathcal{U}_\alpha = X \setminus \bigcup\{O\in\tau_\alpha \mid \pi_\alpha^{-1}(O)\in\mathcal{U}\}$
def. sjednocení

Definuji $f: A\to\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, $f(\alpha) := x_\alpha$, spec. $f\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

f je pokryt $\mathcal{U}$, tj. $\exists \beta_0\in B$ $f\in U_{\beta_0}$. Pak ale $\exists\alpha_0\in A\ \exists O\in\tau_{\alpha_0}$ $f\in\pi_{\alpha_0}^{-1}(O)$ $(=U_\beta)$ $\Leftrightarrow \pi_{\alpha_0}(f)\in O$ $\Leftrightarrow f(\alpha_0)\in O$, ale $f(\alpha_0) = x_{\alpha_0}$ a $x_\alpha\notin\tilde{O}$ (z def. x_α) $\forall\tilde{O}\in\tau_{\alpha_0}$ $\pi_{\alpha_0}^{-1}(\tilde{O})\in\mathcal{U}$. Spor s volbou x_{α_0}.

Tj. $\mathcal{U}_{\alpha_1}$ pokrývá X_{α_1} ($\exists\alpha_1$).

2. X_{α_1} pokrytí $\mathcal{U}_{\alpha_1}$. X_{α_1} kpt. $\Rightarrow \exists\{O_1,\dots,O_n\}\subseteq\mathcal{U}_{\alpha_1}$ $\bigcup_{i=1}^{n} O_i$ pokrývá X_{α_1}. Vem $Y = \{\pi_{\alpha_1}^{-1}(O_i) \mid i=1,\dots,n\}$. ($\tau$ cylindry nad X_{α_1})

Y pokrývá $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$: $f\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Pak $\pi_{\alpha_1}(f)\in X_{\alpha_1} \Rightarrow \exists j\in\{1,\dots,n\}$ $\pi_{\alpha_1}(f)\in O_j$.

To vlastně značí $f\in\pi_{\alpha_1}^{-1}(O_j)\in Y \Rightarrow f\in\bigcup Y$. Odtud Y pokrývá $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. □

Alexandrovo lemma: Pokud z každého otevřeného pokrytí top. prostoru X sestávajícího se výhradně z elementů fixní subbáze $\mathcal{E}$ můžu vybrat konečné podpokrytí, je X kompaktní.

Dk. Sporem, tj. X není kpt. Pak $\exists \tilde{\mathcal{U}}$ otevř. pokrytí X, jež nemá konečné pokrytí. $\Psi := \{\mathcal{U}$ pokrytí $X \mid \mathcal{U}$ nemá kon. podpokrytí$\} \neq \emptyset$.
Ψ část. usp. inkluzí. Vezmu řetězec $R = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ z Ψ, kde A dobře usp. a $\mathcal{U}_\alpha$ pokrytí, $\hat{\mathcal{U}} := \bigcup R$. Zjevně $\hat{\mathcal{U}}$ je horní závora (ve 2^{2^X}). Je však $\hat{\mathcal{U}} \in \Psi$? Sporem. $\hat{\mathcal{U}}$ má kon. podpokrytí $\{O_1, \dots, O_n\}$. Pak ale $O_i \in \mathcal{U}_{\alpha_i} \in R$. Vezmi $\alpha_0 = \max\{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$. Z usp. R je $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$,
usměrněnost: $\alpha < \beta \Rightarrow \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\beta$

což je spor, neb $\mathcal{U}_{\alpha_0} \in \Psi$.
Zornovo lemma, jehož pp. jsme ověřili, nyní umožní $\exists \mathcal{M} \in \Psi$.

$\mathcal{S} := \mathcal{M} \cap \mathcal{E}$.

a) $\mathcal{S}$ pokrývá X: ↯ $\exists x \in X$, že není v žádné mn. z $\mathcal{S}$.
$\mathcal{M}$ pokrývá $\Rightarrow \exists O \in \mathcal{M},\ x \in O$.
$\mathcal{E}$ subbáze $\Rightarrow \exists V_1, \dots, V_n \in \mathcal{E} : x \in \bigcap_{j=1}^n V_j \subseteq O$ ($\Leftarrow$ def subbáze)
Žádné $V_1, \dots, V_n$ není v $\mathcal{M}$. [Kdyby bylo, je v $\mathcal{S}$ a x je pokryt.]
$\forall j : \{V_j\} \cup \mathcal{M} \supsetneq \mathcal{M} \underset{\text{maximalita } \mathcal{M}}{\Rightarrow} \{V_j\} \cup \mathcal{M}$ není v Ψ.
$\{V_j\} \cup \mathcal{M}$ tak obsahuje kon. podpokrytí $X = V_j \cup \bigcup_{i=1}^{k_j} U_{j,i}$, $\forall j$.
Pak $\underline{O \cup (\bigcup_i U_{j,i})} \supseteq \bigcap_{j=1}^n V_j \cup \bigcup_i U_{j,i} \underset{\text{distr. } \cap \text{ a } \cup}{=} \bigcap^n (V_j \cup \bigcup_i U_{j,i}) \supseteq \bigcap_j \{X\}$

nakreslete si

$= X$. Tj. X je nakryto $\{O, U_{j,1}, \dots, U_{j,k_j}\} \subseteq \mathcal{M}$, ale $\mathcal{M} \in \Psi$, tj. nesmí mít kon. podpokrytí. ↯ Tj. $\mathcal{S}$ pokrývá X.

b) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ a $\mathcal{S}$ pokrývá. Splňuje tedy předpoklady lemmatu a lze z něj vybrat kon. podpokrytí. Protože i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ a z $\mathcal{M}$ nelze vybrat kon. podpokrytí, dostáváme spor. Tj. X je kpt. $\square$

Pozn.: Zpět k součinům. $(X_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$ top. prostory. $X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ (= $=\{f: A\to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \mid f(\alpha)\in X_\alpha\}$) dáme souč. topologii, tj. $\{\pi_\alpha^{-1}(U)\mid U\in\tau_\alpha, \alpha\in A\}$ prohlásíme za subbázi. Zjevně $\pi_\alpha : X\to X_\alpha$ spojité (už jsme i použili), $\pi_\alpha(f):=f(\alpha)$)).

Dk. Tychonovovy věty. Vezmi subbázi v $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, tj. $\{\pi_\alpha^{-1}(U)\mid U\in\tau_\alpha, \alpha\in A\}$. Toto je ale i pokrytí součinu.*) To má dle lemmatu k důkazu Tychonovovy věty (je navíc uvažovaného typu) konečné podpokrytí. Ověřili jsme předpoklad Alexandrova lemmatu a $X=\prod_{\alpha} X_\alpha$ je kompakt. $\square$

*) ~~Správně~~ Přesněji máme vzít pokrytí $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(U)\mid U\in\tau_\alpha, \alpha\in A\}$, jež může být jen podmnou subbáze, ale musí pokrývat.