3. Tychonovova věta a konstrukce Haarovy míry

Tychonovova věta: Součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

Haarova míra: Radonova (lok. konečná, Borelova + „konvergence") a invariantní: $\mu(gU)=\mu(U)\ \forall U\in\Sigma$ $\forall g\in G$ (levoinv.)

Požaduje se nenulová.

Pozn.: Pravoinvariantní obdobně $\mu(Ug)=\mu(U)$.

Př.: $X=G=\mathbb{R}$, λ Lebesgueova: $\mu(x+U)=\mu(U)$ transl. inv.,

Definice
a) $\lambda(U):=\sup\{\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i| \mid \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\subseteq U\}$
b) Nebo $\lambda(U):=\int_X \chi_U\, d\lambda$, kde $\int_X d\lambda$ se definuje pomocí schodovitých funkcí (viz minule). $\lambda(x_0+U)=\int_X \chi_{x_0+U}\, d\lambda$

$$=\left| \begin{matrix} y=x-x_0 \\ \text{Fubini} \end{matrix} \right| = \int_X \chi_U\, d\lambda = \lambda(U).$$

Lok. kon. zřejmá: $\forall x\in X$ vezmu $U=(x-\delta,x+\delta)$, $\lambda(U)=2\delta$

regularita (konvergence): $K_n\subseteq U$, $\bigcup K_n=U$, $K_n\subseteq K_{n+1}$

$$\Rightarrow \int_{K_n} f\, d\lambda \longrightarrow \int_U f\, d\lambda$$

Tj. Lebesgue je levoinv. (i pravoinv.) Haarova.

Př.: Počítací: $\mu(Mg)=\#Mg=\#M=\mu(M)$. Lokální konečnost $\Longleftrightarrow$ M diskrétní.

Konstrukce Haarovy míry

Označení: 1. $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$, $f : X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

X top. pstor

("Může" $\exists x_0 \in \mathrm{supp}(f)$, $f(x_0) = 0$)

2. $\|f\| := \sup\{|f(x)|, x \in X\}$

3. $C_c^+(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ spojitá, $\mathrm{supp}(f)$ kompaktní, $f \geq 0 \wedge \|f\| > 0\}$

Dále G grupa : 4. $L_x y := xy \quad \forall x, y \in G$

$R_x y := y x^{-1}$. Výhoda $R_{x_1} R_{x_2} = R_{x_1 x_2}$

[Pozn.: R_x není hom : $G \to G$ $\quad R_x(yz) = yzx^{-1}$

$R_x(y) R_{\cancel{x}}(z) = y x^{-1} z \cancel{x}^{-1}$ $\neq$]

L_x take ne

$\cdot f : G \to \mathbb{C} \quad L_x f := f \circ L_{x^{-1}}$

$R_x f := f \circ R_{x^{-1}}$

5. $(L_x f)(y) = (f \circ L_{x^{-1}})(y) = f(x^{-1} y)$

$(R_x f)(y) = (f \circ R_{x^{-1}})(y) = f(yx)$

Pozn.: R i L (na G) jsou homomorfizmy G do $\mathrm{Bij}(G)$, tj. $x \mapsto \underline{R_x : G \to G}$.

Pro konstrukci Haarovy míry je podstatné

$\forall f, \varphi \in C_c^+(G) : \underline{\underline{C_{f,\varphi}}} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n > 0, x_1, \dots, x_n \in G, f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i} \varphi \right\}$

$(f : \varphi) = \inf C_{f,\varphi} \quad (C_{f,\varphi} \subseteq \mathbb{R}_0^+)$. Je však $C_{f,\varphi} \neq \emptyset$?

Dále buď $\underline{G \text{ topologická grupa}}$.

Lemma 1: $\forall f, \varphi \in C_c^+(G)\ \exists x_1, \dots, x_n\quad f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^{n} L_{x_j} \varphi$

Dk.: 1. $U = \{x \in G \mid \varphi(x) > \frac{\|\varphi\|}{2}\}$. $\varphi \in C(G) \wedge \mathrm{supp}(\varphi)$ kpt. $\Rightarrow \varphi$ má (konečné) supremum ($\Leftrightarrow$ $(\|\varphi\| < \infty)$.

- $\|\varphi\| > 0 \Rightarrow \|\varphi\| > \frac{\|\varphi\|}{2} \Rightarrow \exists y > \frac{\|\varphi\|}{2}\quad y = \varphi(x)$, tj. $U \neq \emptyset$
- U otevřená: $x_0 \in U \Rightarrow \varphi(x_0) > \frac{\|\varphi\|}{2} > 0$. Na nějakém okolí x_0 je $\varphi > \frac{\|\varphi\|}{2}$ (spojitost φ) $(\varepsilon := \varphi(x_0) - \frac{\|\varphi\|}{2})$.

2. $\{gU\}_{g \in G}$ je otevřené pokrytí G

1) otevřené: Náς. g je homeo

2) Pokrytí: $z \in G$, $h \in U$. Hledám g_0, aby $z = g_0 h$

zvol $g_0 = zh^{-1}$ (pak $z \in g_0 U \in \{gU\}_{g \in G}$)

3) Spec. $\{gU\}_{g \in G}$ pokrývá $\mathrm{supp}(f)$, jenž je kpt.

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$, že $\{x_i U\}_{i=1}^{m}$ je pokrytí $\mathrm{supp}(f)$.

3. $\frac{\|\varphi\|}{2} \leq \varphi(y)\ \forall y \in U \ /\frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \Rightarrow \|f\| \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(y) \Rightarrow$

$f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(y)\ \forall x$

4. $x \in G \Rightarrow \exists x_j\quad x \in x_j U$ ($\{x_i U\}_{i=1}^{n}$ nakrývá).

$y := x_j^{-1} x \in U$. Použiji bod 3.: $f(x) \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}\varphi(x_j^{-1}x) =$

$= 2\frac{\|f\|}{\|\varphi\|}(L_{x_j}\varphi)(x) \leq 2\frac{\|f\|}{\|\varphi\|}\sum_{j=1}^{m} L_{x_j}\varphi(x)$ $\square$

nezápornost φ

Pozn.: $f, \varphi \in C_c^+(G)$. Dle lemmatu $\exists x_1, \dots, x_n \in G$

$$f \leq \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} \sum_{j=1}^{n} L_{x_j}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|} L_{x_j}\varphi \text{. tj. pro } c_1 = \dots = c_n = \frac{2\|f\|}{\|\varphi\|}$$

mám $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $C_{f,\varphi} \neq \emptyset$.

Navíc $C_{f,\varphi}$ je zdola omezená, tj. $\inf C_{f,\varphi}$ $\exists$ a je to reálné číslo.

Věta: $f, g, \varphi \in C_c^+(G)$, $c > 0$. Pak

1. $(f:\varphi) = (L_x f : \varphi)$ } invariantnost
2. $(f+g:\varphi) \leq (f:\varphi) + (g:\varphi)$ } sublinearita
3. $(cf:\varphi) = c(f:\varphi)$
4. $f \leq g \Rightarrow (f:\varphi) \leq (g:\varphi)$ } monotonie
5. $(f:\varphi) \geq \|f\| \|\varphi\|^{-1}$
6. $(f:\varphi) \leq (f:g)(g:\varphi)$ } submultiplikativnost

Dk.: 1. • $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $\forall y \in G$: $f(y) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (L_{x_j}\varphi)(y)$, tj.

$\forall x \in G$ $f(x^{-1}y) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (L_{x_j}\varphi)(x^{-1}y) = \sum_{j=1}^{n} c_j L_{xx_j}\varphi(y)$.

Celkem $L_x f \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j}_{\tilde{c}_j} L_{\underbrace{x x_j}_{\tilde{x}_j}} \varphi \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{L_x f, \varphi}$.

• $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{L_x f, \varphi}$, tj. $L_x f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi \Rightarrow$

$\forall y \in G$: $f(\underbrace{x^{-1}y}_{z}) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi(y) \Rightarrow f(z) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j}\varphi(y)$

$= \sum_{j=1}^{n} c_j \cancel{L_{x_j}} \varphi(x_j^{-1}y) = \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1} x x^{-1} y) = \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1} x z)$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x^{-1}x_j} \varphi(z) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow C_{L_x f,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}.$$

Celkem $C_{f,\varphi} = C_{L_x f,\varphi}$ $\forall x \in G$ (dále inf.).

<u>Pozn.:</u> Odvodili jsme k použití později: $f \leq g \Rightarrow L_x f \leq L_x g$ $\forall x \in G$

2. Ukážeme: $C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi} \subseteq C_{f+g,\varphi}$. Buď $z \in C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi}$, tj.

$z = z_f + z_g$, kde $z_f \in C_{f,\varphi}$ a $z_g \in C_{g,\varphi}$. Pak $\exists x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_m$

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} \varphi \wedge g \leq \sum_{j=1}^{m} d_j L_{y_j} \varphi \quad \left(z_f = \sum^{n} c_i,\ z_g = \sum^{m} d_i\right)$$

Odtud $f + g \leq \sum_j^{n} c_j L_{x_j} \varphi + \sum_j^{m} d_j L_{y_j,\varphi} \Rightarrow \sum_j c_j + \sum_j d_j \in C_{f+g,\varphi}$

$C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi} \subseteq C_{f+g,\varphi}$ / inf (obrací inkluzi)

$$\inf (C_{f,\varphi} + C_{g,\varphi}) \geq \inf C_{f+g,\varphi}$$

$$\inf C_{f,\varphi} + \inf C_{g,\varphi} \geq \inf C_{f+g,\varphi} \Rightarrow (f:\varphi) + (g:\varphi) \geq (f+g:\varphi)$$

3. Snadné (triv.)

4. $f \leq g$. Chceme $C_{g,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}$. $\sum_{j=1}^{n} c_j \in C_{g,\varphi}$. Pak $g \leq \sum_{j=1}^{m} c_j L_{x_j} \varphi$. Jelikož $f \leq g \Rightarrow f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} \varphi \Rightarrow$

$\sum c_j \in C_{f,\varphi}$, tj. $C_{g,\varphi} \subseteq C_{f,\varphi}$. Aplikuji inf:

$$(g:\varphi) \geq (f:\varphi).$$

5. $(f:\varphi) \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}$? $\sum_j c_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow f(x) \leq \sum_j c_j L_{x_j} \varphi(x) \leq$

$\leq \sum_j c_j \|\varphi\|$. $\|f\| = \sup\{f(x) \mid x \in G\} \leq \sum_j c_j \|\varphi\| \Rightarrow$

$c_j \geq 0$ + def sup

$$\sum_j c_j \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} \underset{\inf}{\Rightarrow} (f:g) \geq \frac{\|f\|}{\|\varphi\|}$$

6. $\sum_i c_i \in C_{f,g} \wedge \sum_j d_j \in C_{g,\varphi}$. Pak $f \leq \sum_i c_i L_{x_i} g \wedge g \leq \sum_j d_j L_{y_j} \varphi$

$\Rightarrow f \leq \sum_i c_i L_{x_i} \left(\sum_j d_j L_{y_j} \varphi \right) = \sum_{i,j} \underbrace{c_i d_j}_{\tilde{x}_k} L_{x_i y_j} \varphi \Rightarrow$

$\sum_{i,j} c_i d_j \in C_{f,\varphi}$. Dokonce $\sum_i c_i \sum_j d_j \in C_{f,\varphi} \Rightarrow C_{f,g} \cdot C_{g,\varphi} \subseteq$

$\subseteq C_{f,\varphi}$. Odtud $(f:\varphi) = \inf C_{f,\varphi} \leq \inf (C_{f,g} \cdot C_{g,\varphi}) \overset{(C \geq 0)}{=}$

$= \inf C_{f,g} \cdot \inf C_{g,\varphi} = (f:g) \cdot (g:\varphi)$ □

<u>Definice</u>: $f_0 \in C_c^+(G)$. $\forall \varphi \in C_c^+(G)$: $I_\varphi : C_c^+(G) \longrightarrow (0, +\infty)$,

$$I_\varphi(f) = \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}.$$

<u>Cíl</u>: ~~$f_0 \in C_c^+(G)$~~ 1. $I_\varphi(f)$ sublineární a transl. invariantní

2. Urysonova věta (bez dk.)

3. Tychonovova věta (součin kptů)

4. Stejnoměrná spojitost

<u>Tychonovova věta</u>: Nechť A je množina a (X_α, τ_α) buďte pro každé $\alpha \in A$ kompaktní top. prostory. Pak $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se součinovou topologií je kompaktní.