▽ Příklad: $(L^1(G), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konvoluce}}}{*}, {}^*, \|\cdot\|_1)$ je Banachova $*$-algebra, kde

$$f^*(g) := \Delta_G^{-1}(g)\overline{f(g^{-1})} \quad \forall g \in G \text{ a } \|f\|_1 = \int |f|\, d\mu_G, \text{ pokud}$$

G je lok. komp. grupa. (μ_G levá H.-m.)

Dk.: 1. Banachova $\|ab\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ bylo.

2. $*: L^1(G) \circlearrowleft$

a) involutivnost: $f^{**}(g) = (f^*)^*(g) = \Delta_G^{-1}(g)$

$$\overline{f^*(g^{-1})} = \Delta_G^{-1}(g)\,\Delta_G^{-1}(g^{-1})\,\overline{\overline{f(g)}} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Delta_G \text{ je homom.} \\ \text{a do } \mathbb{R}}}{=} \Delta_G^{-1}(g)\,\Delta_G(g)\,f(g) \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta_G \text{ homom.}}}{=} f(g)$$

b) (auto) antihomomorfizmus: $f, h \in L^1(G)$

$$(f*h)^*(g) := \left(\int f(y)\, h(y^{-1}g)\, d\mu_G(y)\right)^* =$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \overline{\int f(y) h(y^{-1}g^{-1})\, d\mu_G(y)}.$$

$$(h^* * f^*)(g) = \int h^*(y) f^*(y^{-1}g)\, d\mu_G(y) =$$

$$= \int \Delta_G(y^{-1})\overline{h(y^{-1})}\,\overline{f(g^{-1}y)}\,\Delta_G(g^{-1}y)\, d\mu_G(y) =$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(y^{-1})}\,\overline{f(g^{-1}y)}\, d\mu_G(y) \quad \left|\begin{array}{l} z = g^{-1}y \\ gz = y \\ y^{-1} = z^{-1}g^{-1} \end{array}\right|$$

$$= \Delta_G(g^{-1}) \int \overline{h(z^{-1}g^{-1}) f(z)}\, d\mu_G(z)$$

3. $*$ je izometrie $L^1(G)$. Složité!

Vede však na vlastnosti pravých subst. pro levou H.-m. Užitečné.

Lemma 1: 1. $\int (R_y f)(x)\, d\mu_G(x) = \Delta(y^{-1}) \int f(x)\, d\mu_G(x)$ ②

2. $\int f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\, d\mu_G(x) = \int f(x)\, d\mu_G(x)$

Dk.: $(R_y f)(x) = f(R_y^{-1} x) \qquad R_y x = x y^{-1}$

$= f(xy)$

1. a) $f = \chi_U,\ U \subset \underset{\text{borel.}}{\Sigma},\ \mu(U) > 0$

$$\int_G \underbrace{\chi_U(xy)}_{=1 \Leftrightarrow xy \in U \Leftrightarrow x \in Uy^{-1}} d\mu_G(x) = \int_G \chi_{Uy^{-1}}(x)\, d\mu_G(x) =$$

$$= \mu_G(Uy^{-1}) = \mu_G^{y^{-1}}(U) = \Delta(y^{-1})\, \mu_G(U) =$$

$$= \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_U(x)\, d\mu_G(x)$$

b) $\int f\, d\mu_G = \lim_i \int s_i\, d\mu_G,\quad s_i = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{U_j}$

a dále bod a)

2. Δ spojitý (def. ...); μ_G

$\tilde{\Delta}(x) := \Delta(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}$

Pozn.: $\tilde{\Delta}$ je homomorfizmus (kom. $\mathbb{R}$)

a) $\int R_y(f\tilde{\Delta})\, d\mu_G \overset{\text{bod 1}}{=} \Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$

b) $\int (R_y f)(x) \tilde{\Delta}(x)\, d\mu_G(x) = \int (R_y f)(x)\, \tilde{\Delta}(xy)\, \tilde{\Delta}(y^{-1})\, d\mu_G(x)$

$= \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int (R_y f)(x)\, \tilde{\Delta}(xy)\, d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}(y^{-1}) \cdot \Delta(y^{-1})\, \cdot$

$\cdot \int R_y(f\tilde{\Delta})\, d\mu_G(x) \overset{2a)}{=} \tilde{\Delta}(y^{-1})\,\Delta(y^{-1}) \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$

$= \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$

Celkem $\int R_y f\, (\tilde{\Delta}\, d\mu_G) = \int f\, (\tilde{\Delta}\, d\mu_G) \Rightarrow$

$I: f \mapsto \int f \tilde{\Delta}\, d\mu_G$ je pravoinv. funkcionál $\Rightarrow \tilde{\Delta}\mu_G$ je pravoinv. míra (neboť (žádný Riesz):

$(\tilde{\Delta}\mu_G)(U\cdot y) = \int_G \chi_{U\cdot y}(x)\,\tilde{\Delta}\,d\mu_G(x) = \int_G \chi_U(xy^{-1})\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G(x) =$ ③

def. char. fce, $\int$ a násobení míry fcí

$\chi_{U\cdot y}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in U\cdot y \Leftrightarrow xy^{-1} \in U$

$= \int_G \chi_U(x)\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G(x) = \tilde{\Delta}\mu_G(U) \Rightarrow \tilde{\Delta}\mu_G$ je pravoinv.

Dle jednoznačnosti $\tilde{\Delta}\mu_G = c\mu_G$

c) $\mu_G^{-1}(U) := \mu_G(U^{-1})$, $U \in \Sigma$, $\mu_G(U) > 0$ [hlídat $\frac{1}{\mu_G(U)}$]

$\mu_G^{-1}(U\cdot y) = \mu_G(y^{-1}U^{-1}) = \mu_G(U^{-1}) = \mu_G^{-1}(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_G^{-1}$ je pravoinvariantní $\Rightarrow \tilde{\Delta}\cdot\mu_G = c\,\mu_G^{-1}$

jedn. Haarovy míry (pravé) „Riesz"

d) $c = 1$? $\varepsilon > 0$, $h \in C_c^+(G)$, $\exists V$ sym.

$\forall x \in V: h(x) = h(x^{-1})$, $\operatorname{supp} h \subseteq V$.

[h předpokládáme co do $\exists$; jinak Tietze... viz dechiffre]

z def μ_G^{-1} (+ def $\int$ na χ, schod., lim.)

Δ_G spojité: $|\Delta_G(x) - 1| < \varepsilon$. Víme: $\int h(x)\,d\mu_G^{-1} = \int h(x^{-1})\,d\mu_G$

$\overset{h}{=} \int h(x)\,d\mu_G$. Píšeme: $|(c-1)\int h(x)\,d\mu_G^{-1}| =$

$= |c\int h(x)\,d\mu_G^{-1}(x) - \int h(x)\,d\mu_G^{-1}(x)| =$ ← dle víme

$= |\int h(x)\,\tilde{\Delta}(x)\,d\mu_G - \int h(x)\,d\mu_G| =$

$\leq |\varepsilon \int h(x)\,d\mu_G| \longrightarrow 0 \Rightarrow c = 1.$!

• Tj. $\int f(x)\,\Delta_G(x^{-1})\,d\mu_G(x) = \int f(x^{-1})\,d\mu_G(x) = \int f(x)\,d\mu_G^{-1}(x)$

triv.

Nyní izometričnost:

$k(g) := f(g^{-1})$ $\int_G k(g^{-1})\,\Delta_G(g^{-1})\,d\mu_G(g) = \int_G k(g)\,d\mu_G(g)$,

tj. * (involuce) je izometrie. □

Pozn.: $L^1(G)$ je C^*-alg. iff $G=\{e\}$ (dk viz Deit/Echt.).

„Obchází" ~~se~~: K Banachově $*$-algebře $\rightsquigarrow$ obalující C^*-algebra. (stejné repr., obdobně jako $\mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$:= \frac{T(\mathfrak{g})}{\langle X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y],\ X,Y\in\mathfrak{g}\rangle}$$ ← 2-ideál v tenz. algebře

(obalující → enveloping) $T(\mathfrak{g}) := \mathbb{k}\oplus\mathfrak{g}\oplus\otimes^2\mathfrak{g}\oplus\cdots$ tzv. univerz. Obdobně

také G kon. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}[G]$ grup. algebra; stejné repr. ope.

Důl. roli hraje $C(H)$ alg. kpt. op na Hilb. pstoru H.
$\forall$ ired. repr. $C(H)$ je izomorfní tautologické, tj.:
$id: C(H) \to B(H)$ $\quad id(A)v = A(v)\ \forall v\in H\ \forall A\in C(H)$
$\Rightarrow$ obdobné vlastnosti mají tzv. liminální C^*-algebry (zanecující; liminaires!), dále postliminální; antiliminální)

Tvrzení: G komutativní l.k. $\Rightarrow L^1(G)$ komutativní.

Dk.: $(f*g)(y) = \int f(x)\,g(x^{-1}y)\,d\mu_G(x) = \int g(x^{-1}y)\,f(x)\,d\mu_G(x)$

$= \left| \begin{array}{l} z^{-1} = x^{-1}y \\ z = x\underline{y^{-1}} \end{array} \right| = \int g(z^{-1})\,f(zy)\,d\mu_G(z)\,\Delta(y^{-1}) =$

pravá

$\Delta(z^{\pm 1})$

$= \left| z \mapsto z^{-1} \right| = \int g(z)\,f(z^{-1}y)\,d\mu_G(z)\,\Delta(y) =$

$= \left| \Delta = 1 \Leftarrow G \text{ kom!} \right| = (g*f)(y).$ $\square$

Pozn.: Na přednášce jsme trochu odbyli mod. faktory ve formulích výše s tím, že jsou $\equiv 1$. Avšak více jsme diskutovali nemožnost užití G-N-věty při důkazu Pontrjaginovy duality. (Pro zákl. porozumění tyto souvislosti netřeba.)

Pozn.: $C^*(G)$ (obalující k $L^1(G)$) $\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_0(\Delta_{L^1(G)})$, pokud G komutativní. (Netřeba)

Zatím: $G_1 := \{\chi : G \to U(1) \mid \chi \text{ spojitý}\}/\cong$

Víme G_1 je top. grupa $(d(\chi,\eta) = \dots)$ spc. Hausdorffův. Chběli bychom G_1 lok. kompaktní (vynecháno, viz Deitmar–Echterhoff). Náznak $G_1 \approx C^*(G) \xrightarrow{\sim}$ $\mathcal{C}_0(\Delta_{L^1(G)})$, ale co toje $\approx$ (Pozor zde G komut.)

lok. komp.

PONTRJAGINOVA DUALITA

Definice: $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ $\quad \delta(g)\chi = \chi(g) \ \forall g \in G \ \forall \chi \in \hat{G}$ se nazývá Pontrjaginovo zobrazení. (Zde stačí G je topol.)

Pozn.: $\delta(g) \in \hat{\hat{G}} \Rightarrow \delta(g): \hat{G} \to U(1) \Rightarrow \delta(g)\chi \in U(1)$ $\forall \chi \in \hat{G}$, nutně. Víme $\hat{G}$ je top. grupa.

Věta (Pontrjagin): G lok. komp. kom. grupa. Pak δ je izomorfizmus top. grup.

Dk.: 1. $\delta(g)$ je homomorfizmus $\forall g \in G$.

$\delta(g)(\chi\mu) = \chi\mu(g) = \chi(g)\mu(g) = \delta(g)\chi \cdot \delta(g)\mu$ $\forall \chi, \mu \in \hat{G}$ (Na $\hat{G}$ násobím bodově z definice.)

2. δ je homom.: $\delta(gh)(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$ $= \delta(g)\chi\, \delta(h)\chi = [\delta(g)\circ\delta(g)](\chi)$

Opět: in $\hat{\hat{G}}$ skládáme grupově tím, že násobíme bodově (def.)

3. Spojitost $\chi_i \to \chi$ $\lim_i \delta(g)(\chi_i) =$ $= \lim_i [\chi_i(g)] = (\lim_i \chi_i)(g) = \chi(g) = \delta(g)\chi$ („máme" bodovou konvergenci).

Celkem 1–3: $\delta(g) \in \hat{\hat{G}}$.

4. Injektivita $\emptyset$, 5. surj. $\emptyset$, 6. spojitost inv.
(Fourierje inj.) $\quad$ síť Diraka $\square$

Věta („Plancherel"): G lok. komp. komut. Pak $\exists!$ levoinv. invariantní míra $\hat{\mu}_G$ na $\hat{G}$ (lok. komp ..... víme), že $L^2(G) \simeq L^2(\hat{G})$ jako Hilb. prostory (tj. izometrie). Dk. $\emptyset$ $\square$ (Deitm. Echt.)

Pozn.: Pontrjagin. dualitu víme v případě
$\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{R}^n$; $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, $\hat{\hat{\mathbb{Z}}} \cong \hat{S^1} \cong \mathbb{Z}$; $\hat{\hat{S^1}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$;
$\hat{\hat{\mathbb{R}^n}} \cong \hat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$.

Zajímavost: G diskr. $\Rightarrow$ $\hat{G}$ kompakt.
G kompakt $\Rightarrow$ $\hat{G}$ diskrétní.

Další „zajímavost": $e \in L^1(G) \Rightarrow G$ diskrétní.
($e \notin L^1(G) \Rightarrow$ můžu ale unitalizovat).

Poissonova sumační formule

1. Neformálně (TOTO ZNÁT)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x+l)$ Pp. konverguje absolutně

  $g(x+1) = g(x) \Rightarrow g$ je 1-periodická.

  F. řada g (= F. transf. g na S^1 !, viz def. F.t. na l.k.g. a úvahy několik hodin dříve):

  $$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x}.$$

  $$\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) = g(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

  $$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(y+l) e^{-2\pi i k y} dy \overset{\text{„stejn. konv."(?)}}{=}$$

  $$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(y+l) e^{-2\pi i k y} dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i k y} dy$$

  $$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$ Pp. stejn. konv.

  Celkem $\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$. Poissonova sumační formule.

2. Formálně.

Věta: $f \in L^1_{bc}(\mathbb{R})$, f po částech C^1 s výjimkou konečně mnoha bodů C^1. $\varphi(x) := \begin{cases} f'(x) & \exists f'(x) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Nechť $x^2 f$ a $x^2 \varphi$ jsou omezené. Pak

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Dk.: $\emptyset$. Postupuji ale skoro stejně jako v neformální části. $\square$

3. Grupové verze Poissonovy sumační formule (NETŘEBA ALE ZAJÍMAVÉ)

A l.k., $B \subseteq A$ uzavřená v A pdgr. (A/B je l.k! faktor. top.)

$\hat{A}, \hat{B}, \widehat{A/B}$ – Souvislosti = ?

Def: $\forall E \subseteq A$, $E^{\perp} := \{\chi \in \hat{A} \mid \chi(e) = 1 \ \forall e \in E\}$

$\forall L \subseteq \hat{A}$, $L^{\perp} := \{a \in A \mid \ell(a) = 1 \ \forall \ell \in L\}$

tzv. anihilátory.

Lemma: $\{1\} \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/B \rightarrow \{1\}$ KEP (v kat. top. grup) [i, p spoj. homom., i inj., p surj., $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, p \equiv$ def. KEP v dané kat.] $\Longrightarrow$

$$1 \rightarrow \widehat{A/B} \rightarrow \hat{A} \rightarrow \hat{B} \rightarrow 1 \text{ je KEP.}$$

$\square$

Dk.: $\emptyset$, $\hat{i}(\chi) = \chi \circ i$.

Věta o Poissonově sumaci: $B \subseteq A$ uz. podgrupa l.k. komutativní grupy A. $\forall f \in L^1(A)$, $f^B \in L^1(A/B)$

$$f^B(xB) := \int_{b \in B} f(xb)\, d\mu_B(b).$$

[Dle předch. lemmatu $\widehat{A/B} \cong B^{\perp}$]. Pak $\widehat{f^B} = \hat{f}|_{B^{\perp}} \wedge \in L^1(B^{\perp})$

$$\wedge \int_B f(xb)\, d\mu_B(b) = \int_{B^{\perp}} \hat{f}(x)\, \chi(x)\, d\mu_B(x).$$

Dk. vynechán $\square$ (viz Deitm.-Echt.)

Př.: Věta o Poissonově sumaci pro $A = (\mathbb{R}, +)$, $A \simeq \hat{A} \cong \mathbb{R}$ (víme), $B := \mathbb{Z}$, $\hat{B} = \hat{\mathbb{Z}} = S^1$; $x = 0$

$$\int_{\mathbb{Z}} f(b)\, \overset{d\mu_{\mathbb{Z}}}{=} \sum_{b \in \mathbb{Z}} f(b) \ \rightarrow \text{míra je diskrétní.}$$

$$\widehat{A/B} = \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{topol}}}{=} \widehat{S^1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{víme}}}{=} \mathbb{Z} \quad (+B^\perp \simeq \widehat{A/B})$$

$$\int_{\mathbb{Z}} \hat{f}(b)\underset{\substack{\shortparallel\\ e^{2\pi i b x}}}{\chi(b)}\, d\mu_{\mathbb{Z}} = \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(b).$$

dosaď $x=0$

To je Poissonova sumační formule (klasická).

- **Aplikace Poissonovy sumační formule** („těžká" modularita [tím myslím chování vůči $SL(2,\mathbb{Z})$ akci] Θ-funkce). TOTO ZNÁT PO - - -

Definice: $\Theta(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t k^2}$, $t \geq 0$ slyší Θ-funkce. (theta funkce)

Pozn.: Konvergence Θ-fce:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{-\pi t (k+1)^2}}{e^{-\pi t k^2}} = e^{-\pi t (2k+1)} \overset{?}{<} 1 \text{ ano}$$

$[-\pi t (2k+1) < 0]$

Komutace $\mathcal{F}$ na $\mathbb{R}^n$ s různými transf. $\mathbb{R}^n$ a der.

Pozorování: • $\mathcal{F} \circ T_a = e^{\pm 2\pi i a \xi} \mathcal{F}$, • $\mathcal{F} \circ M_a = \dots$ $(M_a f(x) := a f(x))$

• $\mathcal{F} \circ D^\alpha = (\pm 2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}$, • $T_a f(x) := f\, T_a^{-1}(x) = f(x-a)$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

• Nás zajímá chování $\mathcal{F}$ $(G = \mathbb{R}^n)$ a $\delta_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a>0$, $\tilde{\delta}_a x = ax$, $(\tilde{\delta}_a f)(x) = f(a^{-1}x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tzv. dilatace.

Lemma: $\mathcal{F} \circ \tilde{\delta}_a = a^n \tilde{\delta}_{\frac{1}{a}} \circ \mathcal{F}$, $\forall a > 0$ (netriviální vlastnost, co do jejího zmiňování).

Dk.: $[(\mathcal{F}\circ\tilde{\delta}_a)f](\xi)=[\mathcal{F}f(a^{-1}-)](\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(a^{-1}x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left|\begin{matrix} y=a^{-1}x \\ dy=a^{-n}dx\end{matrix}\right| = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i y a\xi}\, a^n dy =$$

$$= a^n \int f(y) e^{-2\pi i \langle ay,\xi\rangle} dy = a^n \hat{f}(a\xi) =$$

$$= a^n \tilde{\delta}_{\frac{1}{a}}\hat{f}(\xi) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\circ\tilde{\delta}_a = a^n \tilde{\delta}_{\frac{1}{a}}\circ\mathcal{F}} \quad \square$$

Veta: $\Theta\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{t}\,\Theta(t)\ \forall t>0.$

Dk.: $f_t(x):=e^{-\pi t x^2} \Rightarrow f_t=\tilde{\delta}_{\frac{1}{\sqrt{t}}}f_1 \;\Big|\; \mathcal{F}f_t=\mathcal{F}\tilde{\delta}_{\frac{1}{\sqrt{t}}}f_1=$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^1\tilde{\delta}_{\sqrt{t}}\,\mathcal{F}(f_1) \underset{\text{1. cvič.}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{\delta}_{\sqrt{t}}f_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{1}{t}x^2}.$$

Poisson. fmle: $\sum_k \mathcal{F}f_t(k)=\sum_k f_t(k) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_k e^{-\frac{\pi k^2}{t}}=\sum_k e^{-\pi k^2 t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right)=\Theta(t). \quad \square$$

Pozn.: Modularita. $\rho: SL(2,\mathbb{R})\longrightarrow Bij(\mathbb{H})$, kde

$\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ $\quad \rho(g)z:=\frac{az+b}{cz+d}\ \forall g$

$=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$. ? Je do, tj.: $z\in\mathbb{H} \Rightarrow \rho(g)\in\mathbb{H}$?

? Je dobre def?

$\tilde{\rho}: SL(2,\mathbb{R})\longrightarrow Aut(\mathcal{H}ol(\mathbb{H}))$, $\mathcal{H}ol(\mathbb{H})=\{f$

$:\mathbb{H}\to\mathbb{C}\mid f$ je holom.$\}$ / Nikdy Merom.

$[\tilde{\rho}(g)f](x):=f(g^{-1}x)\ \forall g\in SL(2,\mathbb{R})$.

$\tilde{\Theta}(z)=\sum e^{-\pi z i k^2}$, $\mathrm{Im}\,z>0$, $g=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Př.: $\widetilde{\Theta}(z) := \sum_k e^{\pi i k^2 z}$, $z \in \mathbb{H}$, $z = it$ dřívější Θ.

(Σ) konvergence je lokálně stejnoměrná (v z).

Všimněte si $\widetilde{\Theta}(z) = \widetilde{\Theta}(z+2) \Rightarrow \widetilde{\Theta}$ je 2-periodická

- $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$; $\overline{\Theta}(z) := \sum_k e^{2\pi i k^2 z}$

$$(g \cdot \overline{\Theta})(z) = \overline{\Theta}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) = \overline{\Theta}\left(\frac{z-1}{0z+1}\right) = \sum e^{2\pi i k^2 (z-1)}$$

$$= \sum e^{2\pi i k^2 z} = \overline{\Theta}(z)$$

- $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$; $(g.\overline{\Theta})(z) = \overline{\Theta}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z\right] =$

$$= \overline{\Theta}\left(\frac{-1}{z}\right) \overset{?}{=} \sqrt{zi}\, \overline{\Theta}(z)$$

? ← nedosazoval jsem, zkuste

V každém případě je vidět, že Θ není přímo invariantní. V teorii čísel (Mordell, Hecke, Petersson) se zavádí tzv. mod. repr. řádu k

od 20:40.
cca min. 84

$$(g \cdot f)(z) = |cz+d|^{-k} f(g^{-1} z).$$

Takto se ukáže invariance Θ-fce vůči modulární repr. přísl. řádu. (Viz Bump: Automorphic Forms and Repr. nebo Krieg, Koecher: Elliptische Fktionen und Modulformen nebo Apostolov nebo Zagier: "ABC"... atd.)

Pozn.: Ad p-adická čísla: Pro $\mathbb{Q}_p$ se definují celá p-adická čísla

konfuze s klas. značením $\{0, \dots, p-1\}$ → $\mathbb{Z}_p := \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p < 1\}$.

Dále se ukáže, že p-adická čísla mají „p-adickou reprezentaci", tj. $a \in \mathbb{Q}_p$ $\quad a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n p^{-n}$, $a_n \in \{0, \dots, p-1\}$

Pak se konstruuje Haarova míra: $\dfrac{dx}{|x|_p}$

[Pak okruh adèl (lok. konečné součiny).]