Matematická analýza - 5. domácí úkol

Martin Vavřík

2. ledna 2021

Úkol č.1: Vypočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6-6x^5+2}+\sqrt[5]{x^7+x^3+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}+1}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+2}+\sqrt[5]{\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^3}+1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}+1}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+2}+\sqrt[5]{\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^3}+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-2x+x^3}+\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}}}{\sqrt[4]{1-6x+2x^6}+\sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{15}{2}}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-0+0}+\sqrt[3]{0+0}}{\sqrt[4]{1-0+0}+\sqrt[5]{0+0+0}} = 1$$

Úkol č.2: Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n,\ a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ n\geq 1$$

Řešení: Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$, protože operace sčítání, dělení a násobení jsou uzavřené na množině kladných čísel (a tedy $a_1 > 0 \implies a_2 > 0 \implies \cdots \implies a_n > 0$). Ověříme, zda je posloupnost monotónní:

$$a_n < a_{n+1}$$

$$a_n < \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n^2+1}{2a_n}$$

$$2a_n^2 < a_n^2+1$$

$$a_n^2-1<0$$

Vidíme, že platí (uvažujeme pouze $a_n > 0$):

$$a_n < 1 \implies a_n < a_{n+1}$$

$$a_n > 1 \implies a_n > a_{n+1}$$

Pokud $a_n = 1$, tak je každý následující člen posloupnosti roven jedné (a tedy i limita). Pokud navíc platí následující implikace, posloupnost je rostoucí pro $a_1 < 1$ a klesající pro $a_1 > 1$:

$$a_n < 1 \implies a_{n+1} < 1$$

$$a_n > 1 \implies a_{n+1} > 1$$

Ověříme:

$$\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n^2+1}{2a_n} < 1$$

$$a_n^2 - 2a_n + 1 < 0$$

$$(a_n - 1)^2 < 0$$

Vidíme, že $\forall a_n \neq 1 : a_{n+1} > 1$. Posloupnost je tedy klesající pro $a_1 > 1$, pro $a_1 < 1$ je klesající její podposloupnost $\{a_n\}_{n\geq 2}$. Posloupnost je zdola omezená číslem 0, je tedy konvergentní. Spočítáme tedy limitu:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

$$L = \frac{L^2+1}{2L}$$

$$2L^2 = L^2 + 1$$

$$L^2 - 1 = 0$$

Získáváme dva kandidáty na limitu $L = \pm 1$, protože posloupnost je kladná, vyhovuje pouze $L = 1$.