Úlohy k opakování

1. Dokažte $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
2. $A, B \subseteq X$. Pak $A \subseteq B \Leftrightarrow X \setminus A \supseteq X \setminus B$.
3. $\forall A, B, C$ množiny : $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
4. $A, B \subseteq X$. Pak $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus B$ ($\Leftrightarrow B \subseteq X \setminus A$)

---

1. 3 dělí $2^{2n+1}+1$, $2^{2n+1}+1$ je dělitelné 3. Dokažte.
2. $n^{n+1} > (n+1)^n$ $\forall n \geq 3$, dokažte

---

1. sup, inf, min, max z $M = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555;\ \dots\}$
   4 3 1 2
2. (d.cv.) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$. Dokažte sup M není racionální!

   Smíte použít : (a,b), $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ obsahuje racion. číslo.

(A) MNOŽINY

(1.) DeMorganovo pravidlo: $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$.

Dk.: a) $\neg(A\vee B)$ platí, právě tehdy když (ptk) $A\vee B$ neplatí, což nastane, ptk oba neplatí ($\neg A\wedge\neg B$ platí), neboť platil-li by aspoň jeden, platil by i $A\vee B$.

Tabulkové ověření, že $A\vee B$ neplatí, ptk $\neg A\wedge\neg B$ platí:

A	B	$A\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b) Jen tabulkové ověření:

sloupeček „dobudoucna"

A	B	$A\vee B$	$\neg(A\vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\wedge\neg B$	$\neg(A\wedge B)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

(1') Analogické de Morganovo pravidlo: $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$

(2.) Dokažte: $A, B\subseteq X$. Pak $A\subseteq B \Leftrightarrow X\setminus A\supseteq X\setminus B$. (Rozdíl obrací inkluzi.)

1. Dk.: 1. Nechť $A\subseteq B$ (*). Chceme $X\setminus B\subseteq X\setminus A$. Nechť $x\in X\setminus B \Rightarrow x\in X\wedge \underline{x\notin B}$. Pak nutně $x\notin A$. Sporem. Kdyby $x\in A$, tak podle (*): $\underline{x\in B}$. Spor.

2. Nechť $X\setminus B\subseteq X\setminus A$ (**). Chceme: $A\subseteq B$. Nechť $x\in A$. Kdyby $x\notin B$, tak ale $x\in X\setminus A$ podle (**). To je spor s $x\in A$. Tedy $x\in B$. Celkem $A\subseteq B$.

2. Dk. (obojí najednou). Použijeme $a\Rightarrow b \Leftrightarrow (\neg b\Rightarrow\neg a)$ (princip nepřímého důkazu).

$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\in X)(x\in A\Rightarrow x\in B) \overset{\text{dokonce }\Leftrightarrow}{\Rightarrow} (\forall x\in X)(x\notin B\Rightarrow x\notin A)$

$X\setminus B\subseteq X\setminus A \Leftrightarrow (\forall x\in X)(x\notin B\Rightarrow x\notin A)$, což je totéž!

(3.) $\forall A, B, C$ množiny platí $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Dk.: $x \in C \setminus A \cap B \iff x \in C \wedge x \notin A \cap B \iff$

$x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B) \iff x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$

$\overset{\text{deMorg.}}{\iff} x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \overset{\text{distr.}}{\iff}$

$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \overset{\text{def} \setminus}{\iff}$

$x \in C \setminus A \vee x \in C \setminus B \overset{\text{def} \cup}{\iff} x \in C \setminus A \cup C \setminus B$. □

(4.) $A, B \subseteq X$. Pak $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq X \setminus B$ $(\iff B \subseteq X \setminus A)$.

1. Dk.: a) $A \cap B = \emptyset$ (předpokládejme). Pokud $x \in A$, chceme dokázat, že $x \notin B$. Dle bodu 4 je $X \setminus A \cap B = X \setminus A \cup X \setminus B$. Protože $A \cap B = \emptyset$, je $\boxed{\text{BOD 4}}$ $X = X \setminus A \cup X \setminus B$. Protože $A \subseteq X$, je i $x \in X$, a tak $x \in X \setminus A$ nebo $x \in X \setminus B$ (def. sjed.). Jelikož $x \notin X \setminus A$, je nutně $x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B$. Celkem $A \subseteq X \setminus B$. Podobně $B \subseteq X \setminus A$.

b) Předpokládej $A \overset{(*)}{\subseteq} X \setminus B$. Sporem. Předpokládejme (↯) $\exists x \in A \cap B$. Odtud $x \in A$. Dle předpokladu $(*)$ je $x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B$. To je spor.

Pozn.: Bod b) dokazujeme sporem. Nepřímý důkaz, tj. $A \Rightarrow B$ dokazuji pomocí $\neg B \Rightarrow \neg A$, je „něco jiného": z $\exists x \in A \cap B$ bych chtěl $A \not\subseteq X \setminus B$, tj. $\exists a \in A$, jež $\notin X \setminus B$.

2. Dk. (dokažme „$\iff$" bez použití bodu 4).

$A, B \subseteq X$. a) Předpokládám: $A \cap B = \emptyset$. Nechť $x \in A$. Pak $x \in X$ $(A \subseteq X)$. Kdyby $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ ↯ $(A \cap B = \emptyset)$. Tj. $x \notin B$ a $x \in X \setminus B$.

b) Předpokládám: $A \subseteq X \setminus B$. Nechť pro spor $x \in A \cap B$. Pak $x \in A$. Dle předpokladu $x \in X \setminus B$, tj. $x \notin B$ ↯ spor s $x \in A \cap B$.

(B) Zpět k výrokům o přir. číslech

(1.) Dokažte, že $2^{2n+1}+1$ je dělitelné 3 pro každé $n \geq 1$.
(Píšeme $3 \mid 2^{2n+1}+1$.)

Dk.: 1) $n=1$: $3 \mid 2^3+1=9$, ano.

2) Pp. $V(n)$: $3 \mid 2^{2n+1}+1$ (ind. pp.), tj. $2^{2n+1}+1=3k$, $k \in \mathbb{N}$. Chceme $V(n+1)$, tj. $3 \mid 2^{2(n+1)+1}+1$.

Pišme: $2^{2(n+1)+1}+1 = 2^{2n+3}+1 = 2^2 \cdot 2^{2n+1}+1 =$
$= 4(3k-1)+1 = 12k-3 = 3(4k-1)$, tj. $2^{2(n+1)+1}$ je tedy dělitelné 3. $\square$

(2.) $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$.

1) $n=3$: $3^4 = 81 > 64 = 4^3$ ✓

2) Pp $V(n)$: $n^{n+1} > (n+1)^n$

Chceme $V(n+1)$: $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$.

Ne: • $(n+1)^{n+2} = (n+1)^n (n+1)^2 \underset{\uparrow}{<} n^{n+1}(n+1)^2$

Ale my chceme $(n+1)^{n+2} >$

Ne: • Nahrazení $(n+2)$ pomocí $(n+1)$, tj. např.

$$(n+2)^{n+1} = (n+1+1)^{n+1} \underset{\text{bin.}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} (n+1)^k \binom{n+1}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (n+1)^k \binom{n+1}{k} + (n+1)^{n+1} \underset{\text{ok}}{<} \text{ dále viz}$$

složité.

Ne: • Nahrazení $n+1$ pomocí n, tj.
$(n+1)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} n^k \binom{n+2}{k} \ldots \overset{?}{>} \sum (n+1)^{k} {}^{?}$ ALE OPĚT OPAČNÁ NEROVNOST

- Zkusme vše na jednu stranu:

Ano:

ind. pp.: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < 1$, tj. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < 1$.

Chceme: $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} < 1$, tj. $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} < 1$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n+1} <$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind. pp.}}}{<} 1 \,.\ \square$$

(c) Suprema a infima

Zpět k sup. a inf.: supremum (superior) : horní závora nejmenší $\exists x_0 \in M$ $x_0 > \sup M - \varepsilon$

infimum (inferior) : dolní závora největší $\exists x_0 \in M$ $x_0 < \inf M + \varepsilon$

Pozn.: Největší horní závora (a analog. nejmenší dolní závora) nemá příliš smysl. [$M=(a,b)$; $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. $\sup M = ?$ $\forall c > b$ je c horní závora. Největší zjevně neexistuje. ((Vždy najdu větší, $c+1$.))

(1) Př.: $M = \{0,5;\ 0,55;\ 0,555;\ \dots\}$. Určete $\min M$, $\max M$, $\inf M$ a $\sup M$.

(a) 1) $\min M = 0,5$. Zřejmě $0,5 \le 0,\underbrace{5\dots5}_{n\text{-krát}}$, tj. žádný člen z M není menší.

2) $\max M$ neexistuje. Sporem. Nechť existuje, označ jej a. Zde $\max. a \in M$, tj. $a = 0,\underbrace{5\dots5}_{n\text{-krát}}$.

Vezmi $b = 0{,}\underbrace{5\cdots 55}_{(n+1)-\text{krát}}$. Zjevně $b \in M$ a $b > a$, tj.

a není maximem.

3) $\inf M = 0{,}5$. Existuje-li min, je rovno inf. Obecný fakt (Heslo: min nemusí ex, ale inf ano. Analogicky pro supremum.)

4) Tvrdíme $\sup M = 0{,}\overline{5}$. (Všimni se, že $\sup M \notin M$.) 1. $0{,}\underbrace{5\ldots5}_{n-\text{krát}} \leq 0{,}\overline{5}$ ✓

2. Buď $\varepsilon > 0$. Zkoumej $0{,}\overline{5}-\varepsilon$.

Pokud $0{,}\overline{5}-\varepsilon \leq 0$, tak $\forall x$ platí $x > 0{,}\overline{5}-\varepsilon$

Pokud $0{,}\overline{5}-\varepsilon > 0$, v $0{,}\overline{5}-\varepsilon$ se změnila číslice oproti $0{,}\overline{5}$. Vezmi první změněnou číslici / Označ ji b: $0{,}\overline{5}-\varepsilon = 0{,}\underbrace{5\cdots5}_{n\text{ čísel}}b\cdots$

Je nutně $b < 5$. Vezmi $x = 0{,}\underbrace{5\cdots55}_{n\text{ čísel}}$.

Pak $x > 0.\overline{5}-\varepsilon$. Tj. i 2. vlastnost suprema je splněna.

(b) Lze k úkolu přistoupit i jinak, a sice popsat čísla v M bez deset. zápisu.

Zjevně $a_n = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \cdots + \boxed{0{,}\underbrace{0\cdots05}_{n\text{ číslic}}} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = 5\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{9} =$$

Soucet geom. rady

$$\frac{5}{9}(1-10^{-n}).$$ Jen min a sup.

1) $\min M = \frac{1}{2}$, neboť $\frac{1}{2} \le \frac{5}{9}(1-10^{-n}) \iff$

$9 \le 10(1-10^{-n}) \iff 10^{-n+1} \le 1$, což platí $\forall n \ge 1$.

2) $\sup M = 0{,}\overline{5}$. Je potřeba dokázat: a) $\forall x \in M \quad x < 0{,}\overline{5} \quad \wedge$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M \quad x > 0{,}\overline{5} - \varepsilon$.

Proto spočtěme (bez použití des. čárek) číslo $0{,}\overline{5}$.

Označ $c = 0{,}\overline{5}$. Pak $10c = 5{,}\overline{5} \ / -0{,}\overline{5} (= -c)$

$9c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{9}$.

Nyní: a) $\frac{5}{9}(1-10^{-n}) \le \frac{5}{9}$? Zjevně ano: $0 < 1 - 10^{-n} < 1$.

b) $\underset{\in M}{\overset{?}{\exists} x} > 0{,}\overline{5} - \varepsilon$ tj. $\frac{5}{9}(1-10^{-n}) > \frac{5}{9} - \varepsilon \quad \exists n$?

$5 - 5 \cdot 10^{-n} \ge 5 - 9\varepsilon \iff \varepsilon \ge \frac{5}{9} \cdot 10^{-n} \ / \log$

$\log \frac{9}{5}\varepsilon \ge -n \iff n \ge -\log\left(\frac{9}{5}\varepsilon\right)$. Ale $\forall z \ \exists$

n přirozené a větší nebo rovno z. $\square$

(2) Dokažte $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\} \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ = množina všech racionálních čísel. Smíte použít, že každý interval (a,b), $\underset{\in \mathbb{R}}{a} \lneq \underset{\in \mathbb{R}}{b}$, obsahuje aspoň jedno racionální. (d.cv.)

Opakuji $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ racionální

$\mathbb{R}$ reálná

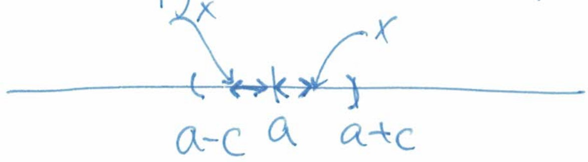
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\})$

D) Definice limity a první příklady

Uvědomme si, jako už několikrát, že $|x-a|<c$ značí



, tj. x je vzdáleno od a o méně než c, tj. $x \in (a-c, a+c)$.

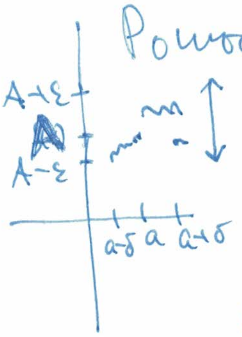
Nechť $A \in \mathbb{R}$. Definujme. *)

Def.: Řekneme, že $\lim_{x \to a} f(x) = A$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Pozn.: 1. O f předpokládám, že je definována na nějakém $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ tzv. prstencovém okolí.

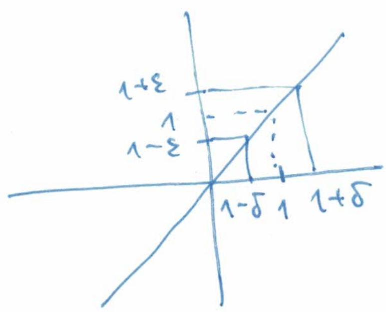
2. f nemusí být def. pro $x=a$ ($0 \not< |a-a| = 0$)



Pomocí intervalů: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

„Pro dosti malá prstencová okolí a je f ~~libo~~ blízko A."

Př.: $f(x) = x$ $\quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1$?

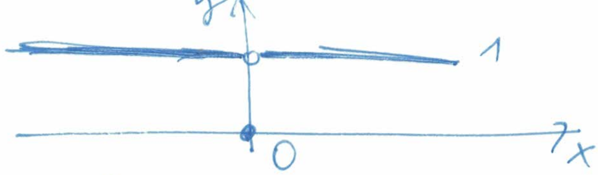


[Proč $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$ je $f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$?]

Ještě přepišme: $\forall \varepsilon > 0 \ \stackrel{?}{\exists} \delta > 0 \ \forall x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$ je $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Teď snadné: Pro lib. ε zvol $\delta = \varepsilon$. (Mohu zvolit i $\delta = \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{3} \dots$)

Mám: $\forall x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{0\}$ je $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

*) Časem $A \in \mathbb{C}$ a i $A = \pm\infty$.

Př.: $f(x) =$ 

Formálně přesně

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Tvrdíme $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

a) f je def. všude (na $\mathbb{R}$), spec. i na prstencovém okolí 0.

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta$? $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ $f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

Avšak $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = 1$, tj.

$f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon$.

Zde tedy mohu δ vzít libovolně (kladné) a docílím toho, že f na $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ je v $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (neb je $= 1$).

Věta (Aritm. limit): Nechť existuje $\lim_{x \to a} f(x)$ a je reálná a nechť existuje $\lim_{x \to a} g(x)$ a je reálná. Pak

1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2) $\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

3) Je-li navíc $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Důležité lemma: $f = h$ na prstencovém okolí a a $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje. Pak existuje $\lim_{x \to a} h(x)$ a je rovna $\lim_{x \to a} f(x)$

Př.: $a \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$. Spočti $\lim\limits_{x \to a} x^n$.

Dle aritm. limit: $\lim\limits_{x\to a} x^n = \lim\limits_{x\to a} (\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-krát}}) \overset{\text{VOAL}}{=} \lim\limits_{x\to a} x \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to a} x$,

pokud $\lim\limits_{x\to a} x$ existuje. Obdobně jako v jednom z předchozích příkladů ($\lim\limits_{x\to 1} x = 1$) zjistím, že $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Tj.

$$\lim_{x\to a} x^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-krát}} = a^n.$$

Př.: Vypočti $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$. VOAL nelze použít, protože

$$\lim_{x\to -1} x(x+1) = \lim_{x\to -1} (x^2+x) \overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} x = (-1)^2 + (-1) =$$

$= 0$! („Nesmím dělit nulou.")

„Trik" zkrácením a použití lemmatu:

$$\underbrace{\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}}_{f} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \underbrace{\frac{(x+1)}{x}}_{h} \quad \forall x \neq 0, -1.$$

Je tedy $f = h$ na $\underbrace{(-1-\delta, -1+\delta) \setminus \{-1\}}_{\text{prstenc. okolí } -1}$.

Proto $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{h} \underset{\uparrow}{=} \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$

VOAL: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -1} x}$,

pokud lim vpravo $\exists$ a $\lim\limits_{x\to -1} x \neq 0$.

Př.: Vypočti $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+2}{x(x-1)} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2x+2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x)} \underset{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 2x + \lim\limits_{x\to -1} 2}{(-1)^2+1}$

$= \frac{1-2+2}{2} = \frac{1}{2}$ ($\lim\limits_{x\to a} c = c$ … snadné!)