

D.c.v. z minulá:

(-1)

Př.: $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \exists x \in (a, a+\varepsilon): x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |x-a| < 1.$ Rěšení:

Co to značí? Existuje číslo (a) , ~~že~~ pro vředny $\varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}$: x je od a o méně než epsilon $\Rightarrow x$ je od a o méně než 1. Nemů náhodou x u a & x u libovolně (jiných) čísla?

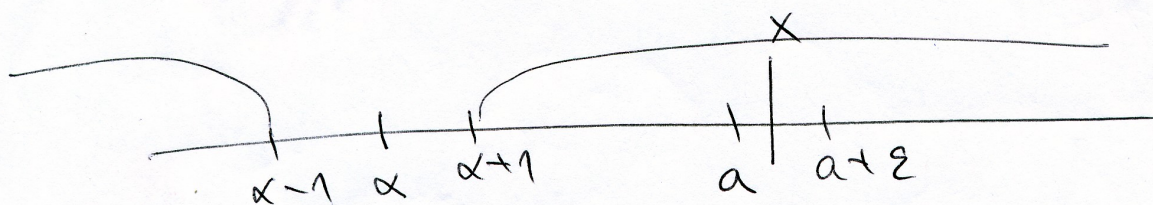
To se zdá, že neplatí. Chceme to dokázat.

Připomení negaci $\neg \forall x V(x) \Leftrightarrow \exists x \neg V(x)$
 $\neg \exists x V(x) \Leftrightarrow \forall x \neg V(x)$

$$\neg \forall x \exists y V(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall x (\exists y V(x,y)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x \neg \forall y V(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg V(x,y),$$

tj. obrátíme kvantifikátory a negaci k výrokové formuli. Chceme tedy dokázat:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} \forall x \in (a, a+\varepsilon): x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-a| < 1, \text{ tj. } x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow x \in (a-1, a+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \notin (a-1, a+1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (a-1, a+1).$$



Stačí $a+1 < a$ a je to " Formálně
 $\exists \varepsilon = 1, \exists \alpha = a-2$ " $\forall x \in (a, a+1): x \in (a, a+1) \Leftrightarrow$
např. $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (a-3, a-1)$

zpět k množinám: Viděli jsme, že množinové rovnosti
 lze dokazovat pomocí ekvivalencí (\Leftrightarrow) z logiky. ②
 Připomeňme ještě: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Jevghodné: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Proč je to prav-
 da?

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ (Připomeňme! } \subseteq \text{)}$$

Nyní "snadné": $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)),$$

neboť $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$. Celkem

$$\Leftrightarrow (\forall x)(A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Def Obraz zobrazení: $f: A \rightarrow B$, pak $f(A) = \{y \in B \mid$
 $\exists x \in A \ y = f(x)\}$.

Pozn.: Někdy obor hodnot zvlášť pokud $B \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{C}$

Př.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Obraz (obor hodnot)
 $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \ y = x^2\}$.

Snadno: $f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty \rangle$, neboť

a) $y \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \ y = f(x) = x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$y \in \langle 0, \infty \rangle$$

b) $\underline{y \in \langle 0, \infty \rangle} \Rightarrow ? \ y \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow y = x^2$ pro
 nějaké $x \in \mathbb{R}$? Ano $x := \sqrt{y}$ (a $x = -\sqrt{y}$).

[Odmocnina existuje, neboť $y \geq 0$].

$$\text{Celkem } f(\mathbb{R}) \subseteq \langle 0, \infty \rangle \wedge \langle 0, \infty \rangle \subseteq f(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty \rangle$. To je z definice. Později

snadnější metody.

Př.: Dokažte: $f(M_1) \setminus f(M_2) \subseteq f(M_1 \setminus M_2)$.

pro $f: A \rightarrow B, M_1, M_2 \subseteq A$. Připomenutí množinový rozdíl $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$.

Dk.: $y \in f(M_1) \setminus f(M_2) \Rightarrow y \in f(M_1) \wedge y \notin f(M_2)$
 $\Rightarrow \exists x_1 \in M_1 \ f(x_1) = y \wedge \neg(\exists x_2 \in M_2)(y = f(x_2))$
 $\Rightarrow \exists x_1 \in M_1 \ f(x_1) = y \wedge (\forall x_2 \in M_2)(y \neq f(x_2))$
 Odtud $x_1 \in M_1 \wedge x_1 \notin M_2$. Kdyby $x_1 \in M_2$,
 pak $y = f(x_1)$ pro $x_1 \in M_2$. To ale neexistuje.
 Celkem $y \in f(M_1 \setminus M_2)$, a tak $f(M_1) \setminus f(M_2) \subseteq f(M_1 \setminus M_2)$.

Dev. Kdy platí rovnost?

Jestli k procvičení!: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
 dokažte. Řešení*) Platí: $(A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (*)
 (ověřte tabulkou!!). K množinám:

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \cup C &\stackrel{\text{def } \cup}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\stackrel{\text{def } \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \stackrel{\text{def } \cap}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).
 \end{aligned}$$

Celkem $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
 tj. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

*) Celkem svíže před uduos.

Matematická indukce

Výrokovou formuli: $\forall n \geq n_0 \quad V(n)$ dokazujeme tak, že dokážeme $V(n_0)$ a implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, $n \geq n_0$.

[Víme pak $V(n_0)$. Jelikož $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, tak $V(n_0) \Rightarrow V(n_0+1)$.
Jelikož $V(n_0)$ víme, víme i $V(n_0+1)$. Dále $V(n_0+1) \Rightarrow V(n_0+2)$
a víme $V(n_0+1)$, tj. víme $V(n_0+2)$ atd. Mat. indukce se dokazuje vrácitkovně možná.]

Př.: $\forall n \geq 1 \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dokažte.

Dk.: $n_0 = 1$

1. $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 \checkmark$ je pro $n = n_0$.

2. Předpokládáme $V(n)$: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(n+1)$: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
↑
dokazujeme

Indukční předpo-
klad (dosadíme $n+1$ za n ve)

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}, \text{ což bylo dokázat.} \end{aligned}$$

Př.: $\forall n \geq 1 \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$. Sunde použít vzorec pro součet aritm. řady.

Dk.: Opet $n_0 = 1$.

1. Pro $n = n_0 = 1$: $1^3 = (1)^2 = 1 \checkmark$

2. Předpokládáme $V(n)$, tj. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$ (Indukční předpoklad)

$$V(n+1): 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = (1+2+\dots+(n+1))^2 \quad (2)$$

chceme dokázat.

ind. předpoklad

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] + (n+1)^3 \stackrel{\leftarrow}{=} \leftarrow$$

$$(1+2+\dots+n)^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + (n+1)^3 =$$

součet aritmetické řady (znám!...!)
" "

$$= \frac{1}{4} [n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3] = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) =$$

opět Σ aritm. řady

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2 = \left[\frac{1}{2} (n+1)(n+2) \right]^2 \stackrel{\leftarrow}{=} (1+2+\dots+(n+1))^2,$$

což bylo dokázat.

Například

• Symboly: $\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_m$; $\sum_{i=1}^m a_i =$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_m, \quad (\text{Suma } a_k \text{ od } 1 \text{ do } m)$$

$$\prod_{p=1}^m x_p = x_1 \cdots x_m. \quad (\text{Součin / produkt } x_p \text{ od } 1 \text{ do } m.)$$

"Přirozeně" mohou sčítat i $\sum_{k=m}^m x_k, m \leq m.$

Něco "nitřně" jiného: (Pro všechna $n \geq 1$:)

Př.: $\prod_{i=1}^m (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^m x_i, x_i \geq -2 \text{ a } x_i \text{ stejna? známa.}$

Dk.: $n_0 = 1. \quad 1) (1+x_1) \geq 1+x_1 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \leftarrow \text{reálná čísla}$

2) Předpokládej $\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$ (ind. pp.)

A) Počítejme $\prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) = \left[\prod_{i=1}^n (1+x_i) \right] (1+x_{n+1}) \geq$ (ind pp.)

snaží použít
ind. pp.

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n x_i \right) (1+x_{n+1})$$

před $x_{n+1} \geq -1$

pp - předpoklad

Proč? Víme $\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$ $\cdot (1+x_{n+1}) \Rightarrow$ ③

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} (1+x_i) \geq (1 + \sum_{i=1}^n x_i) (1+x_{n+1})$$

Dále: $\prod_{i=1}^n (1+x_i) \geq (1 + \sum_{i=1}^n x_i) (1+x_{n+1}) = 1 + x_{n+1} +$
 $+ \sum_{i=1}^n x_i + \underbrace{x_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i}_{\geq 0 \text{ (stejná znam.)}} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i$

Celkem složité-vynecháno

B) • Co případ, kdy $\exists x_i \neq -1$? (obtěžnější)

•) Nejdřív $\forall i \ x_i \in (-2, 1)$. "Po ríměm zkoušeni" se ukazuje vhodnost dvoukrokové indukce, tj. dokázat $V(1)$ a $V(2)$ a $V(n) \Rightarrow V(n+2)$ [odhad $V(1), V(2), V(1) \Rightarrow V(3) \Rightarrow V(4); V(2) \Rightarrow V(4) \wedge V(2) \vee n \Rightarrow V(4), \dots$]

$V(1)$ bylo. $V(2)$: $(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 \geq$
 $\geq 1 + x_1 + x_2 = 1 + \sum_{i=1}^2 x_i$ \checkmark . Nyní $V(n) \Rightarrow V(n+2)$

\forall vhodné je, že $(1+x_n)(1+x_{n+1}) > 0$ \forall (navození od $1+x_n$ a $1+x_{n+1}$).

$$V(n+2): \prod_{i=1}^{n+2} (1+x_i) = \prod_{i=1}^n (1+x_i) \underbrace{(1+x_n)}_{<0} \underbrace{(1+x_{n+1})}_{<0}$$

$$\geq (1 + \sum_{i=1}^n x_i) (1+x_{n+1}) (1+x_{n+2}) = (1 + \sum_{i=1}^n x_i)$$

$$\cdot (1+x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2}) = 1 + x_{n+1} + x_{n+2} +$$

$$\underbrace{x_{n+1} x_{n+2}}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n x_i + (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2}) \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\geq 1 + x_{n+1} + x_{n+2} + \sum_{i=1}^n x_i + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}_{<0} \underbrace{\left[(1+x_n)(1+x_{n+2}) - 1 \right]}_{\substack{\in (0,1) \\ \in (-1,0)}}$$

$$\geq 1 + x_{n+1} + x_{n+2} + \sum_{i=1}^n x_i = 1 + \sum_{i=1}^{n+2} x_i \quad \text{cld}$$

což bylo dokázat.

••) Nyní: Některá $x_i \in (-2, -1)$, jiná ne. Avšak stejna' znaménka, tj. $x_j \in (-1, 0)$ ($x_j > 0$ nemůže být).

Označme $M_1 = \{i \mid x_i \in (-2, -1)\}$, $M_2 = \{j \mid x_j \in (-1, 0)\}$

$$\prod_{i=1}^n (1+x_i) = \prod_{i \in M_1} (1+x_i) \prod_{j \in M_2} (1+x_j) \geq \prod_{i \in M_1} (1+x_i) \prod_{j \in M_2} (1+x_j)$$

≥ 0 dle •

$$= \prod_{j \in M_2} (1+x_j) + \sum_{i \in M_1} x_i \prod_{j \in M_2} (1+x_j) \stackrel{A)}{\geq} 1 + \sum_{j \in M_2} x_j + \sum_{i \in M_1} x_i \prod_{j \in M_2} (1+x_j)$$

$\leq 0 \quad \in (-1, 1)$

$$\geq 1 + \sum_{j \in M_2} x_j + \sum_{i \in M_1} x_i = 1 + \sum_{i=1}^n x_i$$

• Př.: $\forall n \geq 0 \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, kde
 považujeme $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dokažte. Sůte
 použít: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, kde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dk.: 1) $n=0$: $(a+b)^0 = 1 \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \checkmark$

Idea*) 2) $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \stackrel{\text{ind. pp}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

ok. ∇ (Idea)

$$\left. \begin{array}{l} k := k'-1 \\ k=0 \Rightarrow k'=1 \\ k=n \Rightarrow k'=n+1 \end{array} \right\} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n-(k'-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$\left[\text{zpět} \right] = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

*) Maximální součet s $a^{\frac{n+1-k}{k}} b^k \nabla$ Další možnost
 (těžší) je smlouva o transj. komb. čísel, by byla $\binom{n+1}{k} \dots$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{(n+1)-k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \textcircled{5} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Pr. (sam): $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Dokázat $n \geq 1$.

Post.: Ide o $1 \cdot \dots \cdot n \leq \frac{(n+1)}{2} \dots \frac{(n+1)}{2}$.

Dk.: 1) $1! \leq 1^n = 1$

2) $(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1) \frac{(n+1)^n}{2^n} =$

$= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}$. Chceme $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$.

Je $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{2} \geq$ \leftarrow Příklad s Π & Σ

$\geq \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + (n+1) \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$

tj. skutečně (**), a tak $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$

abd.

Pr. AG-nerovnost. $\forall x_i \geq 0$ je

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leq \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$$

\uparrow geom. \uparrow aritm. průměr

Krátkej důkaz.

Lemma: $x_1 \cdots x_n = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n$.

Dk.: 1) $n=1$ triv

2) Předp. $V(n)$. Chceme $V(n+1)$:

$$x_1 \cdots x_n x_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n+1.$$

a) $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 1 = n+1 \geq n+1 \checkmark$

b) $\exists x_i \neq 1$, BŮNO $x_i > 1$. Díky $x_1 \cdots x_{n+1} = 1$
 \uparrow
 bezújmy na obecnosti

ale existuje $x_j < 1$ ($j \neq i$). Pro jednoduchost
 uvažujme $i = n$ & $j = n$. Víme

$$\underbrace{x_1 \cdots x_{n-1}}_{\text{m čísel!}} (x_n x_{n+1}) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + \cdots + x_{n-1} \\ + x_n x_{n+1} \geq n \end{array} \right. \text{Potřebujeme}$$

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n+1. \text{ Z } \textcircled{A}:$$

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \geq n+1.$$

Pokud $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1$,
 jsme hotovi. To je ekvivalentní

$$x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1, \text{ což je ekv.}$$

$$(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0, \text{ což však platí.}$$

Dikaz nerovnosti: $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Vezmi (62)
normalizovane' $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$.

Součin je $\frac{x_1 \dots x_n}{(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n})^n} = 1$, tj. pp. lemmatu

je splněn, a tak $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} \geq n$, odkud

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \text{ a tedy } \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq$$

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \text{ cqd.}$$

Pozn.: Dikaz saurtné nerovnosti je bez indukce.
použit

Pr.: $(2n)! < 2^{2n} (n!)^2$. Dokažte. ⑦

Dk.: 1) $2! < 2^2 \cdot (1!)^2$ ✓

2) $(2n+2)! = (2n)! (2n+1)(2n+2) < \overset{\text{ind. pp.}}{2^{2n} (n!)^2} (2n+1)(2n+2) < 2^{2n+2} [(n+1)!]^2$

$\Rightarrow 2^{2n+2} (n!)^2 (n+1)^2$, jsem hotov (to je v $(n+1)!$)! pokud ukážu

Stačí tedy $(2n+1)(2n+2) < 2^2 (n+1)^2$

$$4n^2 + 6n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

$$0 < 2n + 2, \text{ triv. } n > -1$$

Uspořádat (elegantiěji): Zřejmé

(*) $(2n+1)(2n+2) < 2^2 (n+1)^2$, užit L.S. $4n^2 + 6n + 2$

a P.S. $4(n^2 + 2n + 1) = 4n^2 + 8n + 4$ (L.S. < P.S. pro $n \geq 1$).

Dále $(2n+2)! = (2n)! (2n+1)(2n+2) < \overset{\text{i. pp.}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot$

$(2n+1)(2n+2) \stackrel{(*)}{\leq} 2^{2n} (n!)^2 (n+1)^2 =$

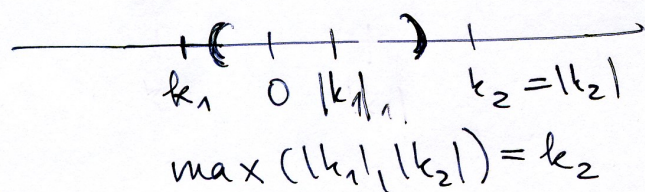
$$= 2^{2n+2} [(n+1)!]^2, \text{ cqd.}$$

Supremum & infimum

8

Def. $M \subseteq \mathbb{R}$ shora omezena' $\Leftrightarrow \exists k_1 \forall x \in M \ x \leq k_1$
 $M \subseteq \mathbb{R}$ zdola omezena' $\Leftrightarrow \exists k_2 \forall x \in M \ k_2 \leq x$
 $M \subseteq \mathbb{R}$ omezena' $\Leftrightarrow \exists k \forall x \in M \ |x| \leq k$

Obr.



M je shora i zdola omezena' ($k = \max\{|k_1|, |k_2|\}$)

Nejmenší prvek M , tj. $\min M$, je prvek $z M$, že $\forall x \in M$: $\min M \leq x$

Najvětší prvek M , tj. $\max M$, je prvek $z M$, že $\forall x \in M$: $x \leq \max M$.

Pr.: $\max [0, 1] = 1$ ($\forall x \in [0, 1]: x \leq 1 \wedge 1 \in [0, 1]$)
 $\max [0, 1)$ neexistuje! $1 \notin [0, 1)$ a pro $1 - \delta$ ($\delta > 0$) najdu v $[0, 1)$ prvek větší, viz výše.

Proto supremum & infimum.

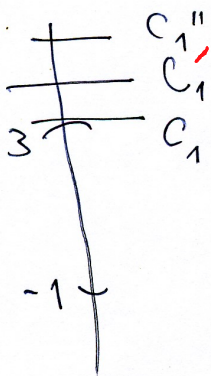
$C_1 \in \mathbb{R}$ horní závora $M \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in M \ x \leq C_1$

$C_2 \in \mathbb{R}$ dolní závora $M \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in M \ x \geq C_2$

Supremum M , $\sup M$, nejmenší horní závora

Infimum M , $\inf M$, největší dolní závora

Obr.:



c_1', c_1'' horní řádky

c_1 je z nich nejmenší

(uvězte uesit už $c_1' \wedge c_1''$)

(9)

Ekviv. definice sup & inf

Poznatek : A) 1. $\forall x \in M: x \leq \sup M$

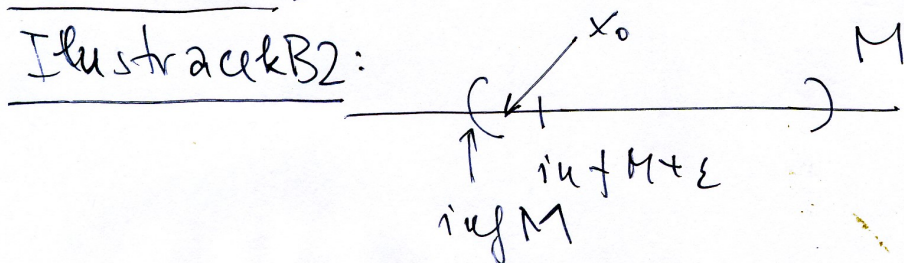
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in M: x_0 > \sup M - \varepsilon$

↑
Jakmile vezmeme uesit už $\sup M$,
nemáme horní řádky, najdeme "element"
 x_0 větší než $\sup M - \varepsilon$.

B) 1. $\forall x \in M: x \geq \inf M$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in M: x_0 < \inf M + \varepsilon$

Ilustrace k B2:



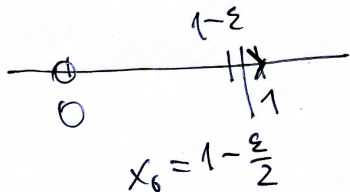
Př.: 12a) $M = (0, 1)$

• $\max(0, 1) = 1$ ($\forall x \in (0, 1) \quad x \leq 1$)

• $\sup(0, 1) = 1$: 1. $\forall x \in (0, 1) \quad x \leq 1$

2. Necht' $\varepsilon > 0 \exists x_0 > 1 - \varepsilon$

$x_0 \in (0, 1)$? Ano $x_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$



Vskutku:

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$$

$$1 > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

- $\min(0, 1]$ neexistuje! Pro spor. Necht^v \exists .
 Je elementem $(0, 1]$, tj. jdo nejake $0 < \delta_0 \leq 1$.
 Vezmi $\frac{\delta_0}{2}$. $\frac{\delta_0}{2} < \delta_0$? Ano: $\frac{1}{2} < 1$ a mohy
 delit $\delta_0 \neq 0$.

- $\inf(0, 1] = 0$
 1. $\forall x \in (0, 1] : x \geq 0$
 2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 = \frac{\varepsilon}{2}$
 $x_0 < 0 + \varepsilon$, ano $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

b) $M = [0, 1]$; $\sup [0, 1] = 1 = \max [0, 1]$
 $\inf [0, 1] = 0 = \min [0, 1]$

c) $M = (0, \infty)$. Zde musime definici sup
a inf doplnit: M nem' shora omezena' \Rightarrow
 $\sup M = \infty$; M nem' zdola omezena' \Rightarrow
 $\Rightarrow \inf M = -\infty$.

Zde $\max M$ neexistuje
 $\min M$ neexistuje (jakev $(0, 1]$)
 $\sup M = \infty$
 $\inf M = 0$.

d) $M = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup M = +\infty$ ($n=1$)
 $\max M$ neexistuje
 $\inf M = 0$
 $\min M$ neexistuje, neboť

~~$\forall x \in M$ "vezmi" císlo zadané čítkou x
a jev po prvém ušmál číslci: $x = 1,0023 \Rightarrow$
vezmi $x_0 = 0,002$~~

Toto číslo je již k dispozici x , a proto x není minimum. Žádné $x \in \mathbb{R}$ není minimum \Rightarrow minimum \nexists . (11)

Definujeme: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A+B := \{x = a+b \mid a \in A, b \in B\}$
 $-A = \{-x \mid x \in A\} = \{x \mid -x \in A\}$.

Pr.: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B omezené. Dokažte, že $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Dk.: $\left. \begin{array}{l} \forall a \in A \quad a \leq \sup A \\ \forall b \in B \quad b \leq \sup B \end{array} \right\} a+b \leq \sup A + \sup B$

1. $\forall x \in A+B$,

$\exists a, \exists b: x = a+b \leq \sup A + \sup B$

$\Rightarrow \sup A + \sup B$ je horní závora $A+B$.

2. Bod 2 Poznámky $\forall \varepsilon > 0 \exists x_A \quad x_A > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists x_B \quad x_B > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

Odtud $x_A + x_B > \sup A + \sup B - \varepsilon$,

tj. existuje $(\forall \varepsilon > 0) x_0 = x_A + x_B \in A+B$,

že $x_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$. Tím je i 2.

bod def. sup. dokázán, a tak

$\sup(A) + \sup(B)$ je supremem $A+B$,
 $\sup(A+B)$.

• D.c.v. (úroveň) : $\inf(-A) = -\sup A$.

• Pr.: Dokažte $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$.

$$\begin{aligned} \text{Dk.: } \inf(A-B) &= -\sup(-A+B) = -[\sup(-A) \\ &+ \sup(B)] = -\sup(-A) - \sup(B) = \\ &= \inf A - \sup B. \end{aligned}$$

Post.: $A-B := A + (-B)$ $[-(A-B) = B-A$?

$$\begin{aligned} x \in -(A-B) &\Leftrightarrow -x \in A-B \Leftrightarrow -x = a + (-b), a \\ &\in A, b \in B \Leftrightarrow x = b - a = b + (-a) \Leftrightarrow x \in B-A. \end{aligned}$$

Supremum & infimum funkce

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in M \} = \sup f(M)$$

$$\inf_{x \in M} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in M \} = \inf f(M)$$

Pr.: $\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$ pro
 f, g omezené ($= \forall x \in M \quad |f(x)| < k$)

$$\text{Dk.: } f(x) \leq \sup_{\tilde{x} \in M} f(\tilde{x}) \wedge g(x) \leq \sup_{\tilde{x} \in M} g(\tilde{x}) \Rightarrow$$

$$f(x) + g(x) \leq \sup_{\tilde{x} \in M} f(\tilde{x}) + \sup_{\tilde{x} \in M} g(\tilde{x}) \Rightarrow$$

$\alpha + \beta$ je horní závrata $f(x) + g(x)$.

$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \exists$, neboť $f(x) + g(x)$ je také omezená (Proč?). Jelikož $\sup_{x \in M} (f(x) + g(x))$ je

$$\text{nejmenší hor. závr} \Rightarrow \sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$$