Zadání lineární formy. Stejně jako je homomorfismus $f : V \to V'$ určen obrazy vektorů libovolně zvolené báze M prostoru V, je lineární forma na prostoru V (což je speciální homomorfismus) určena svými hodnotami v libovolné bázi M prostoru V.

Je-li W **vlastní** podprostor prostoru V, vezmeme nějakou bázi N podprostoru W a rozšíříme ji na bázi M celého prostoru V. Všechny vektory báze N zobrazíme na nulový prvek tělesa T a vektory z $M \setminus N$ zobrazíme třeba na jednotkový prvek tělesa T. Forma f tedy bude nulová na celém podprostoru W, ale nikoli na prostoru V.

Jestliže vektor $v \in V$ neleží v podprostoru W, můžeme zvolit bázi M, která vektor v obsahuje. Vyplývá to z věty o rozšiřování lineárně nezávislé množiny na bázi.

Dimenze duálního prostoru. Má-li prostor V konečnou dimenzi n, má duální prostor stejnou dimezi. Jestliže je M báze prostoru V, má duální báze k bázi M stejný počet prvků, tedy n.

Předpokládejme, že má prostor V nekonečnou dimenzi, pro jednoduchost nechť je spočetná, tj. V má bázi $M = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$. Můžeme nyní definovat cosi jako „duální bázi“, tj. takové formy f_i, $i = 1, 2, 3, \dots$, pro které platí:

$$f_i(v_i) = 1, \qquad f_i(v_j) = 0 \quad \text{pro každé } \ j \neq i.$$

Množina $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ je zřejmě spočetná a lineárně nezávislá. Zdaleka však není bází duálního prostoru V^*. Prostor V^* totiž obsahuje například veliké množství forem, které jsou rovny jednotkovému prvku na nejrůznějších nekonečných podmnožinách báze M.

Situace je podobná příkladu $T^{\mathbb{N}}$. Viděli jsme, že jeho bází není lineárně nezávislá spočetná množina, jejíž prvky jsou nekonečné posloupnosti obsahující jednu jedničku a samé nuly:

$$\{(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots\}$$

Poznamenávám, že vše trochu plave na vodě, protože jste ještě neměli teorii množin, kardinální čísla atd. Intuitivně však je možno podstatu věci chápat.

První duál, druhý duál atd. S druhým duálem není třeba se příliš trápit. Pro podrobnější pochopení by bylo třeba v učebnici pročíst několik stran, které jsme vynechali.

Představme si prostor V jako prostor, jehož prvky jsou vektory (jejich charakter může být jakýkoliv). Prvky duálního prostoru jsou lineární formy, tj. jistá zobrazení prostoru V do tělesa T. Víme, že formy můžeme sčítat a násobit skalárem (vždyť to jsou homomorfismy), vždyť $V^* = \mathrm{Hom}\,(V, T)$.

Nyní zavedeme nové značení vztahem $< v, f >= f(v)$. Jedná se o bilineární symbol, neboť platí

$$< v_1 + v_2, f >=< v_1, f > + < v_2, f >, \qquad < av, f >= a \cdot < v, f > \quad \text{linearita formy}$$
$$< v, f_1 + f_2 >=< v, f_1 > + < v, f_2 >, \qquad < v, af >= a \cdot < v, f > \quad \text{sčítání forem, násobek formy}$$

Tento symbol je tedy „symetrický“. Poslední dva vztahy můžeme přepsat takto:

$$v(f_1 + f_2) = v(f_1) + v(f_2), \quad v(af) = a \cdot v(f).$$

Na vektory prostoru V se proto můžeme dívat jako na lineární formy na prostoru V^*. Prostor V tedy můžeme ztotožnit s prostorem $(V^*)^*$. Druhý duál je tedy „roven“, přesněji řečeno je izomorfní prostoru V.

Pokud však má prostor V nekonečnou dimenzi, má V^* dimenzi větší, druhý duál $(V^*)^*$ má dimezi ještě větší atd. Pravda je, že se to špatně představuje.