Věta 14.14. S důkazem této věty se moc netrapme. Symbolika bohužel značně zatemňuje poměrně jednoduchou myšlenku, která bezprostředně navazuje na Lemma 14.6 a využívá základní vlastnosti determinantů. První sloupec si představíme jako lineární kombinaci sloupců matice A s koeficienty z prvního sloupce matice B, sčítací index označíme i_1. Podle lemmatu 14.6 se determinant matice AB rozpadne na n determinantů. V každém z nich rozložíme obdobným způsobem druhý sloupec atd., ... až provedeme obdobné pro n-tý sloupec. [Viz poslední dva řádky na straně 175.] Uvědomíme si, že determinant se dvěma stejnými sloupci je nulový, vypadnou tedy všechny determinanty, kde je $i_k = i_m$ pro $k \neq m$. Proto nebudeme sčítat přes nezávislé indexy $i_1, \ldots, i_n$, ale přes permutace P. Nakonec uspořádáme sloupce podle velikosti indexů, objeví se znaménko příslušné permutace, a pak $\det A$ vytkneme.

Algebraický doplněk. Uvažujme determinant matice A vyjádřený definicí. Když ze všech sčítanců, v nichž figuruje prvek a_{13}, tento prvek vytkneme, bude u prvku a_{13} **v závorce** algebraický doplněk tohoto prvku. Napišme matici třetího řádu $A = \big(a_{ij}\big)$, vytkněme prvky $+a_{11}$, $+a_{12}$, $+a_{13}$, dostaneme rozvoj podle prvního řádku. Ve třech závorkách budeme mít algebraické doplňky výše uvedených tří prvků. [Raději jsem u těch tří členů zdůraznil **plus** – v závorkách pak budou opravdu jejich algebraické doplňky s příslušnými znaménky.]

Reciproká a inverzní matice. Když máme vypočteny algebraické doplňky všech prvků matice A, můžeme z nich sestavit matici A_{rec}, a to tak, že je dáme na „symetrické místo“ podle hlavní diagonály. Konkrétně: vypočteme-li algebraický doplněk k prvku a_{13}, umístíme jej do matice A_{rec} na místo 31, tedy „transponovaně“. Matice A_{rec} úzce souvisí s inverzní maticí. Existuje-li k prvku $\det A$ v uvažovaném okruhu inverzní prvek, je inverzní maticí k matici A matice $(\det A)^{-1} \cdot A_{rec}$.

Tento výpočet inverzní matice je výhodný pouze pro matice druhého řádu. Pokud je například reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

regulární, potom je

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a pokud je matice A navíc celočíselná, je matice A^{-1} celočíselná právě tehdy, když $ad - bc = \pm 1$.

Pro větší matice je tento výpočet nevhodný, neboť předpokládá výpočet většího množství determinantů. Výhodou však je, že umíme inverzní matici vyjádřit **vzorcem**. To se hodí v některých teoretických úvahách a odvozeních. Zanedlouho se seznámíme ještě s další možností výpočtu, resp. vyjádření inverzní matice.

9. 3. 2021