K definici determinantu. Permutace pětiprvkové množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(1) & P(2) & P(3) & P(4) & P(5) \end{pmatrix}$$

odpovídá součinu $a_{31}a_{12}a_{23}a_{54}a_{45}$ prvků matice pátého řádu. Ve druhém řádku permutace jsou řádkové indexy, v prvním řádku sloupcové. Odpovídá to naší definici determinantu, kde jsou součiny typu $a_{P(1)1}a_{P(2)2}a_{P(3)3}a_{P(4)4}a_{P(5)5}$ – tedy první indexy (řádkové) jsou $P(1), ..., P(5)$, druhé indexy (sloupcové) jsou $1, 2, 3, 4, 5$.

* * *

K Lemmatu 14.6. Podle tohoto lemmatu platí následující rovnost (první sloupec jme rozložili na součet dvou sloupců):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

První determinant jsme vyjádřili jako součet dvou determinantů. Příklad je pouze demonstrativní, výpočet v žádném případě neulehčí.

Pomocí tohoto lemmatu lze jednak dokazovat některé teoretické poznatky (např. větu o rozvoji determinantu), jednak snadno počítat některé determinanty, které bychom jinými metodami počítali obtížněji. Někdy stačí na ten determinant chvíli hledět a pak rovnou napsat výsledek. Např. determinant

$$\begin{vmatrix} x+y & x & x & x & x \\ x & x+y & x & x & x \\ x & x & x+y & x & x \\ x & x & x & x+y & x \\ x & x & x & x & x+y \end{vmatrix}$$

si představíme rozložený na $2^5 = 32$ determinantů – nejprve rozložíme první sloupec na dva sloupce (v jednom budou všechna x, ve druhém jedno y a nuly), každý ze dvou vzniklých determinantů rozložíme stejným způsobem na dva determinanty (rozložíme druhý sloupec). To již budeme mít čtyři determinanty. Atd. Nakonec budeme mít 32 determinantů, které snadno vypočteme. V jednom jsou na diagonále prvky y a samé nuly. Ten je roven y^5. Pak máme pět determinantů, v nichž jsou čtyři prvky y na diagonále a jeden sloupeček s prvky x. Ty dávají dohromady $5xy^4$. V ostatních determinantech jsou aspoň dva sloupce s prvky x, tj. aspoň dva stejné sloupce. Proto jsou všechny zbývající determinanty rovny nule. Výsledek je tedy $y^5 + 5xy^4$.

Vypočtěte si obdobný příklad pro determinant třetího řádu, postupně rozkládejte jednotlivé determinanty, rozepište si postup (dostanete 8 determinantů, z nichž budou 4 rovny nule) a uvidíte, že je to jednoduché. Pak již můžete „vypočítat“ determinant obdobně uspořádané matice řádu n. Výsledek je $y^n + nxy^{n-1}$.

* * *

Permutace sloupců matice. Provedeme-li na sloupce matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

permutaci

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

musíme dát 1. sloupec na třetí místo, 2. sloupec na první místo, 3. sloupec na druhé místo, 4. sloupec na páté místo a 5. sloupec na čtvrté místo. Dostaneme matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutace P je lichá, takže determinanty matic A a B mají opačná znaménka.

* * *

Rozvoj determinantu. Věta 14.11 je vyjádřena dvěma „vzorečky“. Jejich smysl je asi vhodné nejprve nahlédnout na příkladech 14.12. Tyto vzorečky se využívají např. v situaci, kdy je v nějakém řádku/sloupci matice, jejíž determinant počítáme, hodně nul. Rovněž v situaci, kdy počítáme determinant matice n-tého řádu, která je nějak pěkně uspořádaná (viz paragraf 15, něco uvidíte na cvičeních).

Smyslem věty je to, že výpočet determinantu n-tého řádu se vyjádří pomocí determinantů $(n-1)$-ního řádu: determinant n-tého řádu je vyjádřen jako součet n determinantů $(n-1)$-ního řádu.

Ve vzorcích pro rozvoj determinantu je třeba si uvědomit, který index je pevný (ten, přes který se nesčítá) – je-li řádkový, je to rozvoj podle řádku, je-li sloupcový, je to rozvoj podle sloupce.