

Vážení a milí,

začíná čtvrtý týden semestru. Minulý týden byl věnován definicím pojmů *vektorový prostor* a *podprostor*, příkladům a pojmu *lineární obal*. Ve čtvrtém týdnu zvládneme zbytek 7. paragrafu.

Definice 7.11 zavádí pojem lineární kombinace. Zdůrazňuji, že se vždy jedná o **konečný součet**.

Věta 7.12 popisuje lineární obal podmnožiny M vektorového prostoru V pomocí lineárních kombinací. Upozorňuji, že definice lineárního obalu podmnožiny M jej vymezuje **shora** (jako průnik všech podprostorů, které M obsahují), zatímco věta 7.12 vytváří lineární obal množiny M z vektorů této množiny („ **zevnitř** “ nebo „ **zdola** “).

Větu 7.12 objasňuje následující příklad 7.13, za níž najdete symbolický popis lineárního obalu konečné, resp. nekonečné množiny, který opět ukazuje podstatu věci.

V poznámce 7.14 jsou shrnuty jednoduché vlastnosti lineárního obalu – jakmile pochopíte jeho definici, měly by vám tyto vlastnosti připadat samozřejmé. Proto ani není třeba si je pamatovat. [Rovnosti uvedené v (viii) si později připomeneme v situaci, kdy budeme upravovat matice (zjišťování hodnoty, řešení rovnic apod.). Popisují tzv. *maticové úpravy*. Mnozí je asi již znáte: vynásobení řádku nenulovým číslem, přičtení násobku prvního řádku ke druhému atd.]

Definice 7.15 zavádí pojmy *množina generátorů*, *konečně generované* a *nekonečně generované* prostory. Zdůrazněme, že nelze definovat nekonečně generovaný prostor jako prostor, který má nekonečnou množinu generátorů. To by byl nesmysl, neboť i konečně generované prostory mohou mít nekonečnou množinu generátorů (a pokud se jedná o prostory nad racionálními, reálnými, komplexními čísly, pak mají nekonečnou množinu generátorů **vždy**). Promyslete si následující příklady 7.16 a 7.17.

Malá odbočka. Uvědomte si, že uvažujeme-li vektorový prostor např. trojic prvků pole Z_5 , jedná se o vektorový prostor, který má 125 prvků. Naproti tomu prostor trojic reálných čísel je nekonečný. Jako nekonečnou množinu generátorů můžeme vzít třeba všechny trojice $(a, a + 1, a^2)$, kde a je přirozené číslo.

Viděli jsme, že průnik podprostorů vektorového prostoru je opět podprostor. Sjednocení podprostorů však podprostorem být nemusí. [Stačí si představit vektory v rovině, které leží na jedné přímce procházející počátkem – jako první podprostor, a vektory ležící na jiné přímce procházející počátkem – jako druhý podprostor. Jejich sjednocení není podprostor, neboť součty vektorů nemusí ležet ani na jedné ani na druhé přímce.] Proto zavádíme definicí 7.18 tzv. *spojení* neboli *součet podprostorů*. Následující příklad 7.19 definici objasňuje.

Definice 7.20 zavádí pojem *lineární množina*. Lineární množinu $v + W$ si snadno představíme jako podprostor W posunutý o vektor v . V prostoru všech vektorů v rovině, které vycházejí z počátku, tvoří vektory ležící na přímkách procházejících počátkem podprostory,

zatímco vektory, které vycházejí z počátku a mají vrcholy na přímce neprocházející počátkem, tvoří lineární množinu (viz příklad 7.22 a obrázek v učebnici).

Definice 7.25 zavádí pojem *lineární algebra*. Je to vektorový prostor, v němž je navíc definováno násobení vektorů, přičemž vzhledem ke sčítání a násobení vektorů je okruhem a násobení vektorů a násobení skalárem je spjato jistou identitou. Klasickým příkladem této algebraické struktury jsou čtvercové matice daného řádu nad polem. Později poznáme lineární algebru endomorfismů vektorového prostoru, která je s algebrou matic izomorfní. Rozmyslete si zatím příklady uvedené v 7.26.

* * *

Pro zpestření života vám posílám něco hudby a tance:

<https://www.youtube.com/watch?v=mxPgplMujzQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=XLDwMWkp1lw>

Knihou tohoto týdne je

V. Vondruška: *Epištoly o elitách a lidu*.

A připojuji dva aforismy:

Jeden profesor matematiky mě nedávno požádal, abych mu vysvětlil svou malbu slovy. Ale to je přece totéž jako požádat matematika, aby své formule objasnil pomocí barev na plátně.

Pablo Picasso

Matematika, to je monumentální stavba postavená lidskou obrazností kvůli pochopení vesmíru. V ní se setkáváme s absolutním a nekonečným, uchvacujícím a nepostižitelným.

Le Corbusier

* * *

Doufám, že jste zdraví a rovněž tak vaši blízcí. Přeji vám hodně energie a chuti ke studiu v těchto podivných nepříjemných podmínkách.

Srdečně zdraví

Jindřich Bečvář

V Praze dne 19. října 2020